

## New dynamic equation of dominant height and site index for *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen in Puebla and Veracruz, Mexico

### Nueva ecuación dinámica de altura dominante e índice de sitio para *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen en Puebla y Veracruz, México

Juan C. Tamarit-Urias<sup>1\*</sup>; Melchor Rodríguez-Acosta<sup>2</sup>; Gerónimo Quiñonez-Barraza<sup>3</sup>; Wenceslao Santiago-García<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Centro de Investigación Regional Golfo Centro, Campo Experimental San Martinito. Carretera Federal México-Puebla km 56.5. C. P. 74100. Tlahuapan, Puebla, México.

<sup>2</sup>Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Centro de Investigación Regional Golfo Centro, Campo Experimental Ixtacuaco. Carretera Martínez de la Torre-Tlapacoyan km 4.5. C. P. 95600. Tlapacoyan, Veracruz, México.

<sup>3</sup>Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias, Centro de Investigación Regional Norte Centro, Campo Experimental Valle del Guadiana. Carretera Durango-Mezquital km 4.5. C. P. 34170. Durango, Durango, México.

<sup>4</sup>Universidad de la Sierra Juárez, Instituto de Estudios Ambientales, División de Estudios de Postgrado. Av. Universidad s/n. C. P. 68725. Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México.

\*Corresponding author: tamarit.juan@inifap.gob.mx; tel.: +52 800 088 2222 ext. 87704.

#### Abstract

**Introduction:** *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen lacks in many areas of site index (SI) models to classify timber productivity.

**Objective:** To develop a dynamic SI equation, using the generalized algebraic difference approach (GADA) to describe the dominant height growth pattern and classify the productivity of natural stands of *P. chiapensis* in Puebla and Veracruz, Mexico.

**Materials and methods:** Four theoretical growth models were used to derive six equations in GADA, fitted to dominant height-age observations from stem analyses of 31 trees. Fitting was performed using the Dummy variable method, which is invariant to the base age; autocorrelation and heteroscedasticity were corrected.

**Results and discussion:** Quantitative evaluation, graphical analysis of residuals and growth trends of equations allowed the selection of an equation derived from the Levakovic II model with higher predictive capacity. With this equation and a base age of 50 years, polymorphic SI curves with variable asymptotes were constructed to classify productivity into low, medium and high, corresponding to SI of 25, 32 and 39 m, respectively. The maximum mean annual increase for the SI of 32 m was 1.07 m·yr<sup>-1</sup> and occurred at 11.08 years. The equation exhibited better performance relative to a previously reported polymorphic equation.

**Conclusions:** It is recommended to use the developed equation to predict dominant height growth and SI of *P. chiapensis* stands in Puebla and Veracruz, Mexico.

#### Resumen

**Introducción:** *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen carece en muchas regiones de modelos de índice de sitio (IS) para clasificar la productividad maderable.

**Objetivo:** Desarrollar una ecuación dinámica de IS, mediante el enfoque de diferencia algebraica generalizada (DAG), para describir el patrón de crecimiento en altura dominante y clasificar la productividad de rodales naturales de *P. chiapensis* en Puebla y Veracruz, México.

**Materiales y métodos:** Cuatro modelos teóricos de crecimiento se utilizaron para derivar seis ecuaciones en DAG, ajustadas a observaciones de altura dominante-edad procedentes de análisis troncales de 31 árboles. El ajuste se realizó con el método de variables Dummy que es invariante de la edad base; se corrigió la autocorrelación y la heterocedasticidad.

**Resultados y discusión:** La evaluación cuantitativa, el análisis gráfico de los residuales y de las tendencias de crecimiento de las ecuaciones permitió la selección de una ecuación derivada del modelo de Levakovic II con capacidad predictiva mayor. Con esta ecuación y una edad base de 50 años se construyeron curvas de IS polimórficas con asíntotas variables para clasificar la productividad en baja, media y alta, correspondientes a IS de 25, 32 y 39 m, respectivamente. El incremento medio anual máximo para el IS de 32 m fue de 1.07 m·año<sup>-1</sup> y ocurrió a los 11.08 años. La ecuación exhibió mejor desempeño con respecto a una ecuación polimórfica previamente reportada.

**Conclusiones:** Se recomienda usar la ecuación desarrollada para predecir el crecimiento en altura dominante e IS de rodales de *P. chiapensis* en Puebla y Veracruz, México.

**Keywords:** generalized algebraic difference approach; height growth; base age invariance; Dummy variable method; Levakovic model.

**Palabras clave:** diferencia algebraica generalizada; crecimiento en altura; invarianza de edad base; método de variables Dummy; modelo de Levakovic.

## Introduction

Estimating the productive potential of forest sites is important for forest management because it helps to determine the annual harvest, establish the rotation and select the most suitable species for an area (Burkhart & Tomé, 2012). Forest productivity as a complex biological concept is estimated indirectly by growth models (Tamarit-Urias et al., 2014). The usual way to reference productivity is to use the dominant height-age relationship using the site index (SI), which is defined as the average height reached by the dominant trees in a stand at a given base age (Quiñonez-Barraza et al., 2015). With SI equations, curves are constructed that show the height growth pattern of trees of a species in an ecoregion (Akbas & Senyurt, 2018).

Growth curves generated by dynamic equations should meet the following attributes: biological realism, sigmoid growth, inflection point, polymorphism, variable asymptotes, base age and simulation path invariance, and height at base age should be equal to the SI (Guerra-Hernández et al., 2021). Base age invariance has been formalized using the algebraic difference approach, where a single parameter of the basic model is expressed according to the site; however, the main limitation of this approach is that the derived equations generate only anamorphic or polymorphic curves, restricting the possibility of describing a wider variety of common growth conditions in forest soils (Cieszewski, 2021).

In Mexico, despite the limitations of the algebraic difference, in the last decades of the last century and even in the first decade of the present century, forest managers used this approach to develop SI equations for species of the genus *Pinus*. Therefore, there is a need to update these models using more flexible modeling approaches and techniques. Thereby, according to Seki and Sakici (2017) and Özçelik, Cao, Gómez-García, Crecente-Campo, and Eler (2019), greater reliability and accuracy in the estimates of dominant height growth and SI will be improved. For this purpose, the generalized algebraic difference approach (GADA) is available. In this approach, the basic model is expanded so that two of its parameters are expressed according to the site by a theoretical variable  $X$ , which is assumed to include the site productivity factors. GADA derives dynamic equations that reproduce polymorphic SI curves with multiple asymptotes with higher biological realism (Cieszewski, 2021; Socha, Tyminska-Czabańska, Grabska, & Orzel, 2020; Sprengel, Spiecker, & Wu, 2022).

*Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen is a subtropical conifer endemic to Mexico and Guatemala and forms part of the cloud forest in Puebla, Veracruz, Guerrero,

## Introducción

La estimación del potencial productivo de sitios forestales es importante para el manejo forestal porque ayuda a determinar la cosecha anual, establecer el turno y seleccionar las especies más adecuadas para un área (Burkhart & Tomé, 2012). La productividad forestal como concepto biológico complejo se estima indirectamente por medio de modelos de crecimiento (Tamarit-Urias et al., 2014). La forma habitual para referenciar la productividad es utilizar la relación altura dominante-edad mediante el índice de sitio (IS) que se define como la altura promedio que alcanzan los árboles dominantes de un rodal a una edad base determinada (Quiñonez-Barraza et al., 2015). Con las ecuaciones de IS se construyen curvas que muestran el patrón de crecimiento en altura de los árboles de una especie en una ecorregión (Akbas & Senyurt, 2018).

Las curvas de crecimiento que las ecuaciones dinámicas generan deben cumplir con los atributos siguientes: realismo biológico, crecimiento sigmoide, punto de inflexión, polimorfismo, asíntotas variables, invarianza de la edad base y del camino de simulación, y la altura a la edad base debe ser igual al IS (Guerra-Hernández et al., 2021). La invarianza de la edad base se ha formalizado mediante el enfoque de diferencia algebraica, donde un solo parámetro del modelo base se expresa en función del sitio; sin embargo, este enfoque tiene como principal limitante que las ecuaciones derivadas generan únicamente curvas anamórficas o polimórficas, con lo cual se restringe la posibilidad de describir una variedad mayor de condiciones de crecimiento comunes en suelos forestales (Cieszewski, 2021).

En México, pese a las limitaciones de la diferencia algebraica, en las últimas décadas del siglo pasado y aún en la primera del presente, los manejadores forestales utilizaron este enfoque para desarrollar ecuaciones de IS para especies del género *Pinus*. Por tanto, es necesario actualizar esos modelos mediante enfoques y técnicas de modelación más flexibles. Con ello, de acuerdo con Seki y Sakici (2017) y Özçelik, Cao, Gómez-García, Crecente-Campo, y Eler (2019), se garantizará mayor fiabilidad y precisión en las estimaciones del crecimiento de la altura dominante e IS. Para lograr este propósito, se cuenta con el enfoque de diferencia algebraica generalizada (DAG). En este enfoque, el modelo base se expande para que dos de sus parámetros se expresen en función del sitio mediante una variable teórica  $X$ , la cual se asume que engloba los factores de la productividad del sitio. La DAG permite derivar ecuaciones dinámicas que reproducen curvas de IS polimórficas con múltiples asíntotas de mayor realismo biológico (Cieszewski, 2021; Socha, Tyminska-Czabańska, Grabska, & Orzel, 2020; Sprengel, Spiecker, & Wu, 2022).

Chiapas and Oaxaca. The species is noted for its rapid growth and high timber potential; it is naturally distributed at altitudes of 600 to 2200 m, with an average annual rainfall of 1 500 to 2000 mm, temperatures of 20 to 22 °C and steep slopes with acidic soils (Perry, 2009). This species plays key ecological and economic roles in the neotropics, is a valuable genetic resource (Del Castillo, Trujillo, & Saénz-Romero, 2009) and is listed with special protection status (Chávez-Pascual et al., 2013). The generation of a new SI function by GADA may be of higher predictive capacity than previous polymorphic models derived from algebraic difference.

The objective of this study was to develop a dynamic SI equation using the generalized algebraic difference approach as a silvicultural tool to describe the dominant height growth pattern and classify the productivity of natural stands of *P. chiapensis* in Puebla and Veracruz, Mexico.

## Materials and Methods

### Study area

The study area was the forest management unit (UMAFOR) 2103 “Teziutlán” of Puebla and 3012 “Valle y Cofre de Perote” of Veracruz, Mexico. The UMAFOR 2103 is located at 20° 02' 34" - 19° 36' 34" N and 97° 43' 46" - 97° 22' 23" W, at an average altitude of 2220 m with an average annual temperature of 12 to 22 °C and Luvisol soils. The UMAFOR 3012 is located at 19° 56' 16.80" - 19° 16' 48.00" N and 96° 53' 42.00" - 97° 25' 01.20" W at an altitude between 500 and 1 600 m. The climate of this UMAFOR is temperate sub-humid with rainfall in summer with an average rainfall of 600 to 1000 mm. The soils are Andosol and Lithosol, and the relief has steep slopes. The arboreal stratum in both regions is mainly composed of species of the genus *Pinus*, including *P. chiapensis*, and *Quercus* and *Liquidambar* taxa typical of the cloud forest (Rodríguez-Acosta & Arteaga-Martínez, 2005).

### Data

The database consisted of a sample of 31 dominant and co-dominant trees of *P. chiapensis*, which was similar to that used by Rodríguez-Acosta and Arteaga-Martínez (2005). In both UMAFOR, the specimens were collected from vegetation belonging to cloud forest; according to Ruiz-Jiménez, Téllez-Valdés, and Luna-Vega (2012), this type of ecosystem maintains similar physiographic, climate, and floristic conditions when the regions are close to each other, as in the present case. This study expanded the observed age range by adding 28 pairs of observations corresponding to ages older than 55 years, generating 385 pairs of age and dominant height data, the basic statistics are shown in Table 1.

*Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen es una conífera subtropical endémica de México y Guatemala que forma parte del bosque mesófilo de montaña en Puebla, Veracruz, Guerrero, Chiapas y Oaxaca. La especie destaca por su crecimiento rápido y potencial maderable alto; se distribuye en forma natural en altitudes de 600 a 2 200 m, con una precipitación anual promedio de 1 500 a 2 000 mm temperaturas de 20 a 22 °C y pendientes pronunciadas con suelos ácidos (Perry, 2009). Esta especie desempeña funciones ecológicas y económicas clave en el neotrópico, es un recurso genético valioso (Del Castillo, Trujillo, & Saénz-Romero, 2009) y está catalogada con estatus de protección especial (Chávez-Pascual et al., 2013). La generación de una nueva función de IS mediante DAG podrá ser de capacidad predictiva mayor que los modelos polimórficos previos derivados de diferencia algebraica.

El objetivo de este trabajo fue desarrollar una ecuación dinámica de IS mediante el enfoque de diferencia algebraica generalizada como una herramienta silvícola para describir el patrón de crecimiento en altura dominante y clasificar la productividad de rodales naturales de *P. chiapensis* de Puebla y Veracruz, México.

## Materiales y métodos

### Área de estudio

El área de estudio fue la unidad de manejo forestal (UMAFOR) 2103 “Teziutlán” de Puebla y la 3012 “Valle y Cofre de Perote” de Veracruz, México. La UMAFOR 2103 se localiza a 20° 02' 34" - 19° 36' 34" N y 97° 43' 46" - 97° 22' 23" O, a una altitud promedio de 2220 m, con temperatura media anual de 12 a 22 °C y los suelos son de tipo Luvisol. La UMAFOR 3012 se ubica a 19° 56' 16.80" - 19° 16' 48.00" N y 96° 53' 42.00" - 97° 25' 01.20" O, a una altitud entre 500 y 1 600 m. El clima de esta UMAFOR es templado subhúmedo con lluvias en verano con precipitación media de 600 a 1000 mm, los suelos son tipo Andosol y Litosol, y relieve con pendientes pronunciadas. El estrato arbóreo en ambas regiones se compone principalmente por especies del género *Pinus*, entre estas *P. chiapensis*, además de taxones de *Quercus* y *Liquidambar* propias del bosque mesófilo de montaña (Rodríguez-Acosta & Arteaga-Martínez, 2005).

### Datos

La base de datos se conformó de una muestra de 31 árboles dominantes y codominantes de *P. chiapensis*, la cual fue similar a la utilizada por Rodríguez-Acosta y Arteaga-Martínez (2005). En ambas UMAFOR, los ejemplares se colectaron en la vegetación que corresponde a bosque mesófilo de montaña; de acuerdo con Ruiz-Jiménez, Téllez-Valdés, y Luna-Vega

**Table 1. Basic descriptive statistics of the variables analyzed in 31 *Pinus chiapensis* trees belonging to two forest management units (UMAFOR 2103 and 3012) in Puebla and Veracruz, Mexico.**

**Cuadro 1. Estadísticas descriptivas básicas de las variables analizadas en 31 árboles de *Pinus chiapensis* pertenecientes a dos unidades de manejo forestal (UMAFOR 2103 y 3012) en Puebla y Veracruz, México.**

| Variable   | Minimum/<br>Mínimo | Average/<br>Promedio | Maximum/<br>Máximo | Standard<br>deviation/<br>Desviación<br>estándar | Coefficient of<br>variation (%)/<br>Coeficiente de<br>variación (%) |
|--|--------------------|----------------------|--------------------|--|---|
| Dominant<br>height (m)/<br>Altura dominante<br>(m) | 0.10               | 16.50                | 51.13              | 11.07  | 67.07   |
| Age (years)/<br>Edad (años)                        | 2.00               | 19.48                | 116.00             | 17.33  | 89.99   |

The specimens represented several growth conditions of the study area. Each tree was felled and sectioned along the stem, starting at stump height and then every 2.55 m in length; 5 cm thick slices were obtained from the lower end of each section. Dominant height and age were determined using a stem analysis methodology (Pretzsch, Dauber, & Biber, 2013); overestimation in height measurements was corrected based on the Carmean method and the Newberry modification indicated by Cancino, Acuña, and Espinosa (2013) and Subedi and Sharma (2010).

#### Dynamic equations in generalized algebraic differences

An exploratory analysis on the fit of 50 dynamic equations, derived from the application of GADA, made possible the pre-selection of six functions as candidates for modeling the dominant height growth and SI of *P. chiapensis* (Table 2). In all cases, two parameters of each basic model were specific to site productivity. The theoretical growth models used as a basis were consigned by Burkhart and Tomé (2012), Panik (2014) and Hernández-Cuevas, Santiago-García, De los Santos-Posadas, Martínez-Antúnez, and Ruiz-Aquino (2018). These models are the Chapman-Richards model from which the dynamic equation labeled M1 was generated, the Korf model from which equations M2 and M3 were derived, the Hossfeld model that gave rise to equations M4 and M5, as well as the Levakovic II model from which equation M6 was obtained.

The general implicit structure of the dynamic equations has the following form  $Y = f(t, t_0, Y_0, \beta_i)$ , where  $Y$  is the average dominant height to be estimated at age  $t$ ;  $Y_0$  is defined as a parameter during fitting, it is the dominant height observed at age  $t_0$ ;  $\beta_i$  are the parameters to be estimated; and  $Y_0$  and  $t_0$  are initial conditions (Tamarit-Urias et al., 2014).

(2012), este tipo de ecosistemas mantienen condiciones fisiográficas, climáticas y florísticas semejantes cuando las regiones están próximas entre sí, tal como ocurre en el presente caso. En este estudio se amplió el intervalo de edad observado al agregarse 28 pares de observaciones que correspondieron a edades mayores de 55 años, lo que generó 385 pares de datos de edad y altura dominante, cuyos estadísticos básicos se muestran en el Cuadro 1. Los ejemplares representaron varias condiciones de crecimiento del área de estudio. Cada árbol se derribó y seccionó a lo largo del fuste, con inicio en la altura del tocón y después cada 2.55 m de longitud; del extremo inferior de cada sección se obtuvieron rodajas de 5 cm de espesor. La altura dominante y edad se determinaron con la metodología de análisis troncal (Pretzsch, Dauber, & Biber, 2013); la sobrestimación en las mediciones de la altura se corrigió con base en el método de Carmean y la modificación de Newberry indicados por Cancino, Acuña, y Espinosa (2013) y Subedi y Sharma (2010).

#### Ecuaciones dinámicas en diferencias algebraicas generalizadas

Un análisis exploratorio sobre el ajuste de 50 ecuaciones dinámicas, derivadas de la aplicación del enfoque de DAG, permitió la preselección de seis funciones como candidatas para el modelado del crecimiento en altura dominante e IS de *P. chiapensis* (Cuadro 2). En todos los casos, dos parámetros de cada modelo base fueron específicos de la productividad del sitio. Los modelos de crecimiento teóricos usados como base fueron consignados por Burkhart y Tomé (2012), Panik (2014) y Hernández-Cuevas, Santiago-García, De los Santos-Posadas, Martínez-Antúnez, y Ruiz-Aquino (2018). Dichos modelos son el de Chapman-Richards del cual se generó la ecuación dinámica etiquetada como M1, el de Korf del cual se derivaron las ecuaciones M2 y M3, el modelo de Hossfeld que dio lugar a las ecuaciones



**Table 2. Dynamic equations in generalized algebraic difference approach evaluated to model growth in dominant height and site index of *Pinus chiapensis*.****Cuadro 2. Ecuaciones dinámicas en diferencias algebraicas generalizadas evaluadas para modelar el crecimiento en altura dominante e índice de sitio de *Pinus chiapensis*.**

| Basic model/<br>Modelo base                                  | Specific<br>parameters/<br>Parámetros<br>específicos | $X_0$ with initial values at $t_0$ and $Y_0$ /<br>$X_0$ con valores iniciales en $t_0$ y $Y_0$   | Dynamic equation/<br>Ecuación dinámica                                       |    |
|--|--|--|--|----|
| Chapman-Richards<br>$Y = a(1 - \exp(-bt))^c$                 | $a = \exp(\beta_1 \chi)$<br>$c = \chi$               | $\chi_0 = \ln(Y_0) / (\beta_1 + F_0)$<br>$F_0 = \ln(1 - \exp(-\beta_2 t_0))$<br>$L_0 = \beta_1(-1/t_0^{\beta_2}) - \ln(Y_0)$   | $Y = \exp(\beta_1 \chi_0)(1 - \exp(-\beta_2 t))^{\chi_0}$                    | M1 |
| Korf<br>$Y = a \exp(-bt^c)$                                  | $a = \chi$<br>$b = \beta_1 + 1/\chi$                 | $R_0 = \sqrt{L_0^2 - 4\ln(\exp(-1/t_0^{\beta_2}))}$<br>$\chi_0 = 0.5(-L_0 + R_0)$  | $Y = \exp(\chi_0) \exp(-1/t^{\beta_2})^{\beta_1 + \frac{1}{\chi_0}}$         | M2 |
|  | $a = \exp(\chi)$<br>$b = \beta_2/\chi$               | $\chi_0 = 0.5(\ln(Y_0) + \sqrt{(-\ln(Y_0))^2 + 4\beta_2 t_0^{-\beta_2}})$<br>$t_0 = \beta_2 \ln(A_1); t = \beta_2 \ln(A)$<br>$t_0 = \beta_2 \ln(E_1); t = \beta_2 \ln(E)$  | $Y = \exp(\chi_0) \exp(-(\beta_2/\chi_0)t^{-\beta_2})$                       | M3 |
| Hossfeld<br>$Y = a/(1 + b \exp(-t))$<br>with: $t = c \ln(A)$ | $a = \chi$<br>$b = \beta_1/\chi$                     | $R_0 = \sqrt{Y_0^2 + 4Y_0\beta_1 \exp(-t_0)}$<br>$\chi_0 = 0.5(Y_0 + R_0)$<br>$t_0 = \beta_2 \ln(A_1); t = \beta_2 \ln(A)$<br>$t_0 = \beta_2 \ln(E_1); t = \beta_2 \ln(E)$ | $Y = 0.5 \left( \frac{(Y_0 + R_0)^2}{Y_0 + R_0 + 2\beta_1 \exp(-t)} \right)$ | M4 |
|  | $a = 1/\chi$<br>$b = \beta_1 \chi$                   | $R_0 = \sqrt{Y_0^2 + 4Y_0\beta_1 \exp(-t_0)}$<br>$\chi_0 = 2/(Y_0 + R_0)$  | $Y = 0.5 \left( \frac{(Y_0 + R_0)^2}{Y_0 + R_0 + 2\beta_1 \exp(-t)} \right)$ | M5 |
| Levakovic II<br>$Y = a \left( \frac{t}{b+t} \right)^c$       | $a = \exp(\chi)$<br>$c = \beta_1/\chi$               | $\chi_0 = \frac{\ln(Y_0) + \sqrt{(\ln(Y_0))^2 - 4\beta_1 \ln(\frac{t_0}{\beta_2 + t_0})}}{2}$  | $Y = \exp(\chi_0) \left( \frac{t}{\beta_2 + t} \right)^{\beta_1/\chi_0}$     | M6 |

$Y$  = height at age  $t$ ,  $Y_0$  = height at age  $t_0$ ,  $A$  = Age (years);  $a$ ,  $b$  and  $c$  = parameter of each basic model;  $X$  = theoretical variable representing site productivity factors;  $F_0$  and  $R_0$  = components of the dynamic equation;  $\beta_i$  = parameters of each dynamic equation to be estimated.

### Fitting strategy

The parameters of the dynamic equations were estimated with the Dummy variable method, described and illustrated by Sghaier et al. (2012) and in Pyo (2017), which is invariant with respect to the base age. This method considers measurement errors and randomness of the data, so, from the individual growth series it estimates local parameters for each tree and global parameters for all individuals corresponding to the  $\beta_i$  of the equations.

Since observations correspond to multiple measurements per tree with hierarchical and longitudinal structure, also, stem analyses, ages at which the dominant heights are determined with not equidistant, show problems of autocorrelation and heteroscedasticity (Quiñonez-Barraza, García-Espinoza, & Aguirre-Calderón, 2018; Trim, Coble, Weng, Stovall, & Hung, 2020). To control autocorrelation,

M4 y M5, así como el de Levakovic II del cual se obtuvo la ecuación M6.

La estructura general implícita de las ecuaciones dinámicas tiene la forma  $Y = f(t, t_0, Y_0, \beta_i)$ , donde  $Y$  es la altura dominante promedio a estimar a la edad  $t$ ;  $Y_0$  se define como parámetro durante el ajuste, es la altura dominante observada a la edad  $t_0$ ;  $\beta_i$  son los parámetros para estimar; y  $Y_0$  y  $t_0$  son condiciones iniciales (Tamarit-Urias et al., 2014).

### Estrategia de ajuste

Los parámetros de las ecuaciones dinámicas se estimaron con el método de variables Dummy, descrito e ilustrado por Sghaier et al. (2012) y en Pyo (2017), el cual es invariante respecto a la edad base. Este método toma en cuenta los errores de medición y los aleatorios de las observaciones, por lo que, a partir de las series de crecimiento individuales estima parámetros locales

covariance structure involving the error term ( $e_{ij}$ ) was modeled by a continuous autoregressive structure of order  $\rho$  (Panik, 2014), whereby the error term was expressed in the following manner:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=\infty} I_k \rho_k^{t_{ij}-t_{ij-k}} e_{ij-k} + \varepsilon_{ij}$$

where,

$e_{ij}$  =  $j$ -th ordinary residue of the  $i$ -th tree

$e_{ij-k}$  =  $j$ -th ordinary residual of the  $i-k$ -th tree

$I_k = 1$  for  $j > k$  and is zero for  $j \leq k$

$\rho_k$  = autoregressive parameter of order  $k$  to be estimated

$t_{ij} - t_{ij-k}$  = distance separating the  $j$ -th of the  $j-k$ -th observation within each tree  $t_{ij} > t_{ij-k}$

$\varepsilon_{ij}$  = error term under the independence condition

Heteroscedasticity was corrected by assuming that the error variance ( $\sigma^2$ ) can be modeled as a power function of the predicted dominant height ( $\hat{Y} = \text{pred} \cdot y$ ) (Ryan, 2009). The weighting factor ( $W_i$ ) used was  $W_i = \hat{Y}_i^k$ ; to achieve homogeneity of variance with dynamic updating of the residuals ( $\text{resid} \cdot y$ ),  $k$  ( $\text{resid} \cdot y$ ),  $k$  had the constant value of 0.5. The variance structure used in the fit was expressed as follows  $\text{resid} \cdot y = \text{resid} \cdot y(\text{pred} \cdot y)^{0.5}$ .

The estimation of the local and global parameters of each dynamic equation, together with the error covariance and variance structure, was programmed for simultaneous fitting with the MODEL procedure of the SAS/ETS statistical package (SAS Institute Inc., 2011). The autocorrelation correction was checked with the Durbin-Watson (DW) statistic (Panik, 2014) and the heteroscedasticity correction was checked by graphical inspection of the residuals against the predicted values.

The goodness-of-fit of the equations was quantitatively assessed by numerical comparisons of the goodness-of-fit statistics: coefficient of determination fitted for the number of parameters ( $R_{adj}^2$ ), root mean square error (RCME), bias and Akaike's information criterion (AIC) (Burkhardt & Tomé, 2012). These were calculated as follows:

$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \left( \frac{n-1}{n-p} \right); R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$RCME = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p}}$$

$$Bias = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \hat{Y}_i}{n}$$

$$AIC = 2p + n \ln \left( \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n} \right)$$

para cada árbol y parámetros globales para todos los individuos que corresponden a los  $\beta_i$  de las ecuaciones. Debido a que las observaciones corresponden a mediciones múltiples por árbol con estructura jerárquica y longitudinal, además que, en los análisis troncales, las edades a las que se determinan las alturas dominantes no con equidistantes, se presentan los problemas de autocorrelación y heterocedasticidad (Quiñonez-Barraza, García-Espinoza, & Aguirre-Calderón, 2018; Trim, Coble, Weng, Stovall, & Hung, 2020). Para corregir la autocorrelación, la estructura de covarianza que implica al término del error ( $e_{ij}$ ) se modeló mediante una estructura continua autorregresiva de orden  $\rho$  (Panik, 2014), con lo que el término de error se expresó en la forma siguiente:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=\infty} I_k \rho_k^{t_{ij}-t_{ij-k}} e_{ij-k} + \varepsilon_{ij}$$

donde,

$e_{ij}$  =  $j$ -ésimo residuo ordinario del  $i$ -ésimo árbol

$e_{ij-k}$  =  $j$ -ésimo residuo ordinario del  $i-k$ -ésimo árbol

$I_k = 1$  para  $j > k$  y es cero para  $j \leq k$

$\rho_k$  = parámetro autorregresivo de orden  $k$  a ser estimado

$t_{ij} - t_{ij-k}$  = distancia que separa la  $j$ -ésima de la  $j-k$ -ésima observación dentro de cada árbol  $t_{ij} > t_{ij-k}$

$\varepsilon_{ij}$  = término del error bajo la condición de independencia.

La heterocedasticidad se corrigió al asumir que la varianza del error ( $\sigma^2$ ) puede modelarse como una función potencia de la altura dominante predicha ( $\hat{Y} = \text{pred} \cdot y$ ) (Ryan, 2009). El factor de ponderación ( $W_i$ ) que se utilizó fue  $W_i = \hat{Y}_i^k$ ; para lograr la homogeneidad de la varianza, con la actualización dinámica de los residuos ( $\text{resid} \cdot y$ ),  $k$  tomó el valor constante de 0.5. La estructura de la varianza que se usó en el ajuste se expresó en la forma  $\text{resid} \cdot y = \text{resid} \cdot y(\text{pred} \cdot y)^{0.5}$ .

La estimación de los parámetros locales y globales de cada ecuación dinámica, junto con la estructura de covarianza y varianza del error, se programó para un ajuste simultáneo con el procedimiento MODEL del paquete estadístico SAS/ETS (SAS Institute Inc., 2011). La corrección de la autocorrelación se verificó con el estadístico de Durbin-Watson (DW) (Panik, 2014) y la corrección de la heterocedasticidad se comprobó mediante la inspección gráfica de los residuales contra los valores predichos.

La calidad de ajuste de las ecuaciones se evaluó cuantitativamente mediante comparaciones numéricas de los estadísticos de bondad de ajuste: coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros ( $R_{adj}^2$ ), la raíz del cuadrado medio del error (RCME), el sesgo y el criterio de información de Akaike (AIC) (Burkhardt & Tomé, 2012). Estos se calcularon de la forma siguiente:

where,

$\hat{Y}_i$ ,  $Y_i$  and  $\bar{Y}_i$  = estimated, observed and average values of the dominant height ( $Y$ ) respectively

$n$  = total number of observations used in the fit

$p$  = number of parameters in each dynamic equation

$R^2_{adj}$ , RCME, bias, AIC and DW were used to implement a quantitative rating criterion that, based on Tewari and Singh (2018), derives an overall rating for each model. This evaluation system provides a hierarchical ordering of the quality and statistical performance of the models, where the lowest total rating corresponds to the best model and vice versa.

The biological realism of the dynamic equations was evaluated by comparing the trajectories of the growth curves that each one described for logical values of SI, which were superimposed on the observed growth trends (Tamarit-Urias et al., 2014). With the selected equation and a reference age or base age ( $E_b$ ) of 50 years, SI curves were constructed to classify the timber productivity of the stands into low, medium and high. The equation was compared with the SI model proposed by Rodríguez-Acosta and Arteaga-Martínez (2005) for the same species and study region. Based on Pretzsch (2009), differential calculus was applied to derive the expressions that determine the current and mean annual increments (CAI and MAI) in dominant height, as well as the respective maximum values for each SI class.

## Result and Discussion

The fit of the dynamic equations indicated that all global and autocorrelation parameters ( $\rho_i$ ) were significant at the 5 % significance level (Table 3). The goodness-of-fit statistics, shown in Table 4, reveal that  $R^2_{adj}$ , RCME and AIC are close to each other. All models explained the total variance of dominant height according to age at a level higher than 98.08 %. The quantitative scoring system showed that the equation with the best statistics was M4 (Hossfeld model), the second best was M2 followed by M3, M6, M5 and finally M1. In terms of bias, equations M1, M5 and M6 stand out since they had comparatively the lowest values. In relation to the DW statistic, the values ranged from 1.61 to 1.92, which are close to 2, which according to Trim et al. (2020), the evidence that the autocorrelation problem was reduced to a minimum. The order of the autoregressive structure  $AR(\rho)$  indicated for each equation corresponded to the one where high significance was achieved in all parameters, full convergence with a stringency level of 0.0001 and the best graphical behavior of the IS curves.

Standardized residuals against predicted values of the equations maintained a random trend distribution in

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2) \left( \frac{n-1}{n-p} \right); R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_i)^2}$$

$$RCME = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p}}$$

$$Sesgo = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \hat{Y}_i}{n}$$

$$AIC = 2p + n \ln \left( \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n} \right)$$

donde,

$\hat{Y}_i$ ,  $Y_i$  y  $\bar{Y}_i$  = valores estimados, observados y promedios de la altura dominante ( $Y$ ) respectivamente

$n$  = número total de observaciones usadas en el ajuste

$p$  = número de parámetros en cada ecuación dinámica.

Los estadísticos  $R^2_{adj}$ , RCME, sesgo, AIC y DW se usaron para implementar un criterio de calificación cuantitativo que, con base en Tewari y Singh (2018), obtiene una calificación total para cada modelo. Este sistema de evaluación permite un orden jerárquico de la calidad y desempeño estadístico de los modelos, donde la calificación total más baja corresponde al mejor modelo y viceversa.

El realismo biológico de las ecuaciones dinámicas se evaluó mediante la comparación de las trayectorias de las curvas de crecimiento que cada una describió para valores lógicos de IS, mismas que se superpusieron a las tendencias de crecimiento observadas (Tamarit-Urias et al., 2014). Con la ecuación seleccionada y una edad de referencia o edad base ( $E_b$ ) de 50 años se construyeron curvas de IS para clasificar la productividad maderable de los rodales en baja, media y alta. La ecuación se comparó con el modelo de IS propuesto por Rodríguez-Acosta y Arteaga-Martínez (2005) para la misma especie y región de estudio. Con base en Pretzsch (2009) se aplicó cálculo diferencial para derivar las expresiones que determinan los incrementos corriente y medio anual (ICA e IMA) en altura dominante, así como los valores máximos respectivos para cada clase de IS.

## Resultados y discusión

El ajuste de las ecuaciones dinámicas indicó que todos los parámetros globales y los de autocorrelación ( $\rho_i$ ) fueron significativos al nivel de significancia del 5 % (Cuadro 3). Los estadísticos de bondad de ajuste, mostrados en el Cuadro 4, revelan que el  $R^2_{adj}$ , la RCME y el AIC son próximos entre sí. Todos los modelos explicaron la varianza total de la altura dominante en función de la edad en un nivel mayor de 98.08 %. El sistema de calificación cuantitativo evidenció que la

**Table 3. Parameters and significance of dynamic equations for modeling dominant height growth and site index of *Pinus chiapensis*.**

**Cuadro 3. Parámetros y significancia de las ecuaciones dinámicas para modelar el crecimiento en altura dominante e índice de sitio de *Pinus chiapensis*.**

| Dynamic equation/<br>Ecuación dinámica | Parameter/<br>Parámetro | Estimator/<br>Estimador | Standard error/<br>Error estándar | T value/<br>Valor t | Significance/<br>Significancia |
|--|-------------------------|-------------------------|-----------------------------------|---------------------|--------------------------------|
| M1                                     | $\beta_1$               | 3.1681                  | 0.176                             | 18.02               | <0.0001                        |
|  | $\beta_2$               | 0.0408                  | 0.003                             | 15.22               | <0.0001                        |
|  | $\rho_1$                | 0.4582                  | 0.023                             | 20.05               | <0.0001                        |
|  | $\rho_2$                | -0.5792                 | 0.025                             | -22.82              | <0.0001                        |
| M2                                     | $\beta_1$               | 0.6234                  | 0.037                             | 16.92               | <0.0001                        |
|  | $\beta_2$               | 6.7750                  | 0.452                             | 15.00               | <0.0001                        |
|  | $\rho_1$                | 0.5193                  | 0.029                             | 17.71               | <0.0001                        |
|  | $\rho_2$                | 0.6576                  | 0.031                             | 21.49               | <0.0001                        |
|  | $\rho_3$                | 0.5454                  | 0.036                             | 15.14               | <0.0001                        |
| M3                                     | $\beta_2$               | 27.7074                 | 1.534                             | 18.06               | <0.0001                        |
|  | $\beta_3$               | 0.6001                  | 0.039                             | 15.55               | <0.0001                        |
|  | $\rho_1$                | 0.5244                  | 0.030                             | 17.38               | <0.0001                        |
|  | $\rho_2$                | -0.6550                 | 0.032                             | -20.71              | <0.0001                        |
|  | $\rho_3$                | 0.5313                  | 0.039                             | 13.66               | <0.0001                        |
| M4                                     | $\beta_1$               | 4 092.5190              | 550.500                           | 7.43                | <0.0001                        |
|  | $\beta_2$               | 1.4722                  | 0.062                             | 23.75               | <0.0001                        |
|  | $\rho_1$                | 1.0223                  | 0.060                             | 17.07               | <0.0001                        |
|  | $\rho_2$                | 0.8922                  | 0.045                             | 19.65               | <0.0001                        |
|  | $\rho_3$                | 0.6570                  | 0.054                             | 12.28               | <0.0001                        |
| M5                                     | $\beta_1$               | 3 199.3280              | 343.200                           | 9.32                | <0.0001                        |
|  | $\beta_2$               | 1.3557                  | 0.054                             | 25.17               | <0.0001                        |
|  | $\rho_1$                | 0.4490                  | 0.023                             | 19.48               | <0.0001                        |
|  | $\rho_2$                | -0.5703                 | 0.026                             | -22.02              | <0.0001                        |
| M6                                     | $\beta_1$               | 7.4792                  | 0.984                             | 7.60                | <0.0001                        |
|  | $\beta_2$               | 11.9382                 | 2.337                             | 5.11                | <0.0001                        |
|  | $\rho_1$                | 0.4474                  | 0.023                             | 19.54               | <0.0001                        |
|  | $\rho_2$                | -0.5693                 | 0.025                             | -22.42              | <0.0001                        |



**Table 4. Goodness-of-fit statistics of the equations evaluated to model the dominant height growth and site index of *Pinus chiapensis*.**

**Cuadro 4. Estadísticos de bondad de ajuste de las ecuaciones evaluadas para modelar el crecimiento en altura dominante e índice de sitio de *Pinus chiapensis*.**

| Dynamic equation/<br>Ecuación dinámica | $R^2_{adj}$ | RCME | Bias/<br>Sesgo | AIC    | DW   | Order $\rho$ /<br>Orden $\rho$ | Total rating/<br>Calificación total |
|--|-------------|------|----------------|--------|------|--------------------------------|-------------------------------------|
| M1                                     | 0.9808      | 1.54 | -0.0040        | 304.11 | 1.61 | AR(2)                          | 25                                  |
| M2                                     | 0.9829      | 1.45 | 0.2032         | 258.09 | 1.82 | AR(3)                          | 14                                  |
| M3                                     | 0.9822      | 1.48 | 0.2042         | 276.07 | 1.84 | AR(3)                          | 17                                  |
| M4                                     | 0.9840      | 1.40 | 0.1277         | 239.65 | 1.92 | AR(3)                          | 8                                   |
| M5                                     | 0.9817      | 1.50 | 0.0581         | 287.02 | 1.71 | AR(2)                          | 21                                  |
| M6                                     | 0.9818      | 1.49 | 0.0754         | 284.34 | 1.70 | AR(2)                          | 20                                  |

$R^2_{adj}$  = coefficient of determination fitted by the number of parameters; RCME = root mean square error; AIC = Akaike's information criterion, DW = Durbin-Watson; AR = autoregressive structure.

$R^2_{adj}$  = coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros; RCME = raíz del cuadrado medio del error; AIC = criterio de información de Akaike, DW = Durbin-Watson; AR = estructura autorregresiva.

all cases (Figure 1), suggesting that heteroscedasticity was minimized to achieve a homoscedastic pattern; therefore, it is inferred that the equations evaluated fit the observed data acceptably. Under this scenario, both corrections allow the estimators obtained in the adjustment to be minimum variance, unbiased and more efficient, which substantially improves the statistical and predictive properties of the equations. In this way, it is possible to estimate realistic confidence intervals and to perform statistical significance tests on parameters with propriety.

Figure 2 shows the dominant height growth trends that dynamic equations reproduce for IS values of 22, 27, 32, 37 and 42 m (Eb = 50 years), superimposed on the observed growth trajectories. A close inspection shows that the M2 and M3 functions tend to overestimate the dominant heights at the best site quality at ages above 60 years; before this age, the trend suggests slight underestimation. On the other hand, equations M4 and M5 tend to slight underestimates in the best SI qualities for the whole age interval. Equation M1 exhibited the poorest behavior, as it underestimates in all SI at early ages. This trend of underestimation is maintained for the best sites at mature and long-lived ages.

In contrast, the dynamic equation M6 (Levakovic II base model) showed better biological realism, because growth trends described by this equation overlap better with the observed trajectories at all SI levels and

ecuación con los mejores estadísticos fue la M4 (modelo de Hossfeld), la segunda mejor fue la M2 seguida de M3, M6, M5 y al final M1. En términos del sesgo destacan las ecuaciones M1, M5 y M6, ya que comparativamente presentaron los valores más bajos. Con relación al estadístico DW, los valores fluctuaron de 1.61 a 1.92, los cuales son próximos a 2, lo que de acuerdo con Trim et al. (2020), es evidencia de que el problema de autocorrelación se redujo al mínimo. El orden de la estructura autorregresiva  $AR(\rho)$  que se indica para cada ecuación, correspondió a aquella en donde se logró alta significancia en todos los parámetros, convergencia plena con un nivel de exigencia de 0.0001 y el mejor comportamiento gráfico de las curvas de IS.

Los residuales estandarizados contra los predichos de las ecuaciones mantuvieron una distribución con tendencia aleatoria en todos los casos (Figura 1), lo que sugiere que la heterocedasticidad se redujo al mínimo para lograr un patrón homocedástico; por lo tanto, se infiere que las ecuaciones evaluadas se ajustan de forma aceptable a los datos observados. Bajo este escenario, ambas correcciones permiten que los estimadores obtenidos en el ajuste sean de varianza mínima, insesgados y más eficientes, lo que mejora sustancialmente las propiedades estadísticas y predictivas de las ecuaciones. De este modo, es posible estimar intervalos de confianza realistas y efectuar los contrastes estadísticos de significación sobre los parámetros con propiedad.

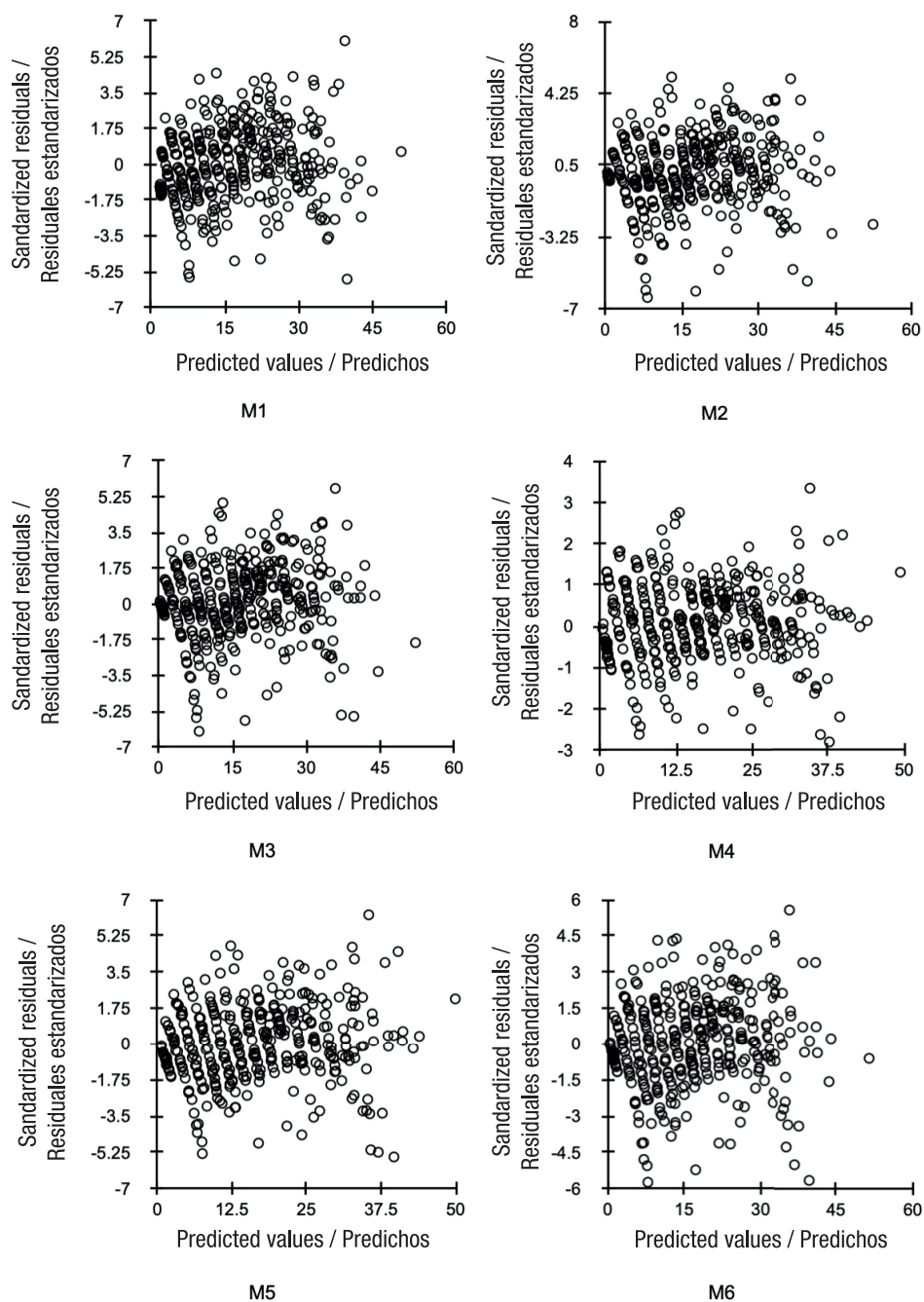
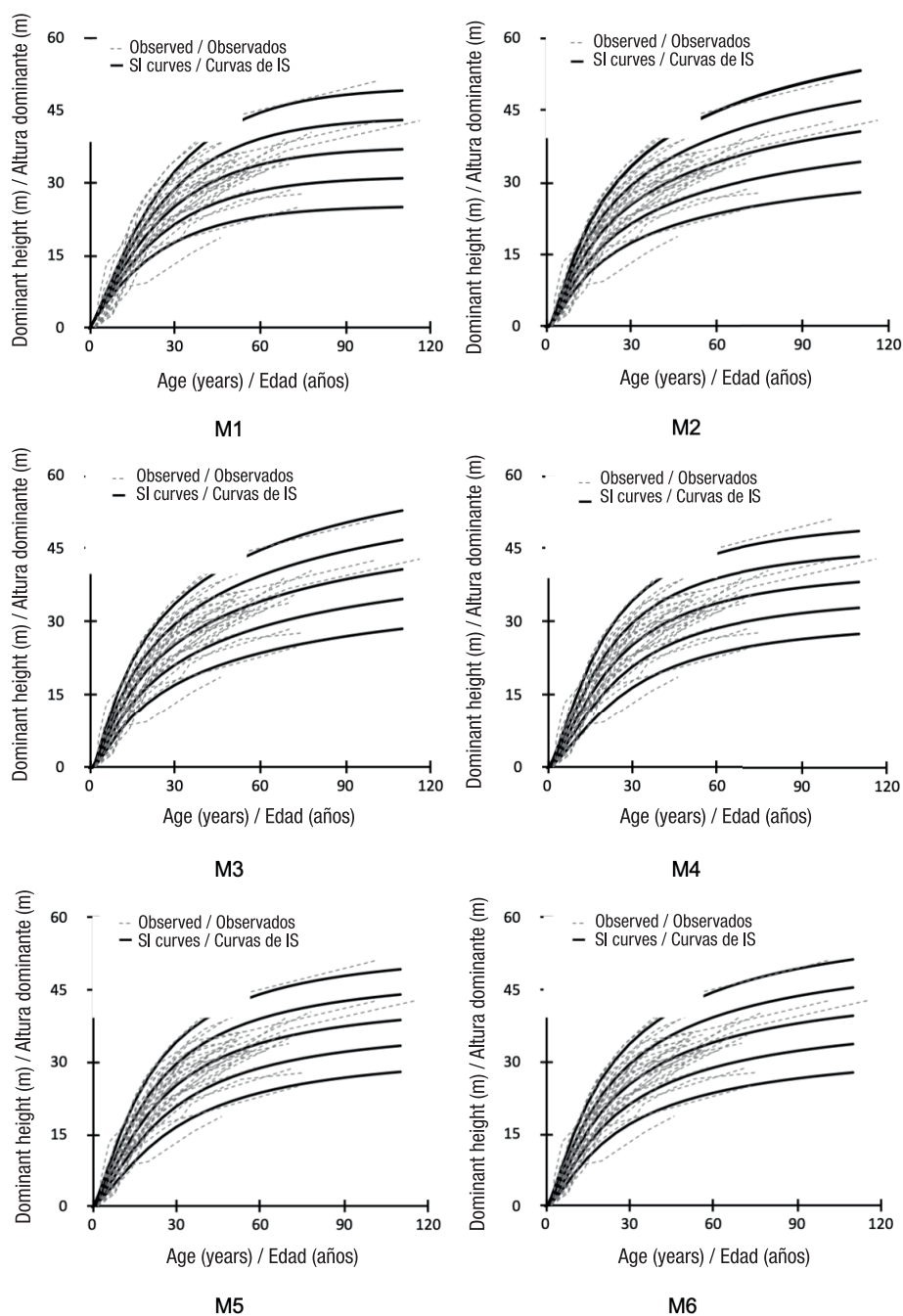


Figure 1. Graphical behavior of the standardized residuals compared to the predicted values of the dominant height of *Pinus chiapensis* for the equations evaluated.

Figura 1. Comportamiento gráfico de los residuales estandarizados con respecto a los valores predichos de la altura dominante de *Pinus chiapensis* para las ecuaciones evaluadas.



**Figure 2. Behavior of the site index (SI) curves reproduced by the dynamic equations evaluated superimposed on growth trajectories observed in *Pinus chiapensis*.**

**Figura 2. Comportamiento de las curvas de índice de sitio (IS) reproducidas por las ecuaciones dinámicas evaluadas sobrepuestas a las trayectorias de crecimiento observadas en *Pinus chiapensis*.**

over the entire age interval analyzed. For this reason, equation M6 was selected to describe the dominant height growth pattern and to classify the productivity of natural stands of *P. chiapensis* in the study area. This selection ratifies that indicated by Özçelik et al. (2019), in the sense that the functions with the best fit statistics do not always best reproduce the observed trends. In this case, statistically, equation M6 ranked second to last; however, given the biological realism it recreates, it clearly has the highest predictive ability. This choice rather than a pure exercise of statistical inference was the product of a compromise and balance between statistical performance and biological reasons. Equation M6 has parsimony with only two parameters, sufficient to reveal the true growth trends at the observed dominant heights.

Based on the parameter values of the dynamic equation M6 and an  $E_b = 50$  years, SI curves were built for three productivity levels labeled as low, medium and high, whose mean values correspond to SI of 25, 32 and 39 m, respectively (Figure 3a). These curves together with their respective limits, in particular the lower and upper limits of the low and high classes, covered the amplitude and trends of all growth series in the analyzed age range. For this reason, the established SI classes were considered enough for productivity classification of natural *P. chiapensis* stands in the study area.

The GADA to generate the M6 equation in combination with the Dummy variable technique to fit it, together with the autocorrelation and heteroscedasticity corrections, achieve a robust dynamic equation for reliable predictions. This aspect is better appreciated when contrasting the SI curves with those reproduced by the SI model proposed by Rodríguez-Acosta and Arteaga-Martínez (2005) (Figure 3b), which corresponds to a polymorphic model, whose base model is the Chapman-Richards model. It is evident that for an  $E_b = 50$  years and the IS values referred to, the polymorphic model does not adequately describe the dominant height growth of *P. chiapensis*. The greatest deficiency is seen for the high SI class, where the growth trends are illogical because the curves collapse, because the value of the horizontal asymptote of the model is lower than the actual height suggested by the observed data. The differences can be explained from a mathematical-statistical point of view, because to generate the polymorphic model they used the algebraic difference approach, in which only the shape parameter was site-dependent and, autocorrelation and heteroscedasticity were not corrected.

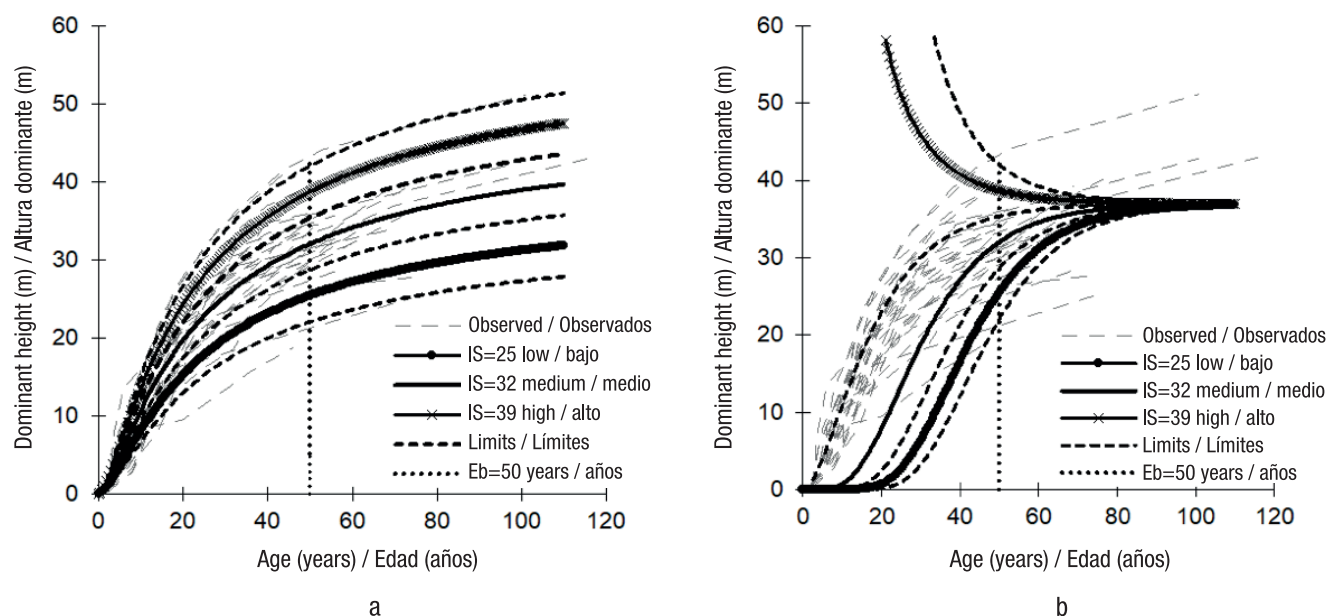
The dominant heights of 25, 32 and 39 m estimated by the new equation, which are equivalent to the SI values ( $E_b = 50$  years), are slightly higher than 24.2,

La Figura 2 muestra las tendencias de crecimiento en altura dominante que las ecuaciones dinámicas reproducen para valores de IS de 22, 27, 32, 37 y 42 m ( $E_b = 50$  años), sobrepuestas a las trayectorias de crecimiento observadas. Una inspección detallada muestra que las funciones M2 y M3 tienden a sobrestimar las alturas dominantes en la mejor calidad de sitio en edades superiores a 60 años; antes de esta edad, la tendencia sugiere ligera subestimación. Por su parte, las ecuaciones M4 y M5 tienden a ligeras subestimaciones en las mejores calidades de IS para todo el intervalo de edad. La ecuación M1 exhibió el comportamiento más deficiente, ya que subestima en todos los IS a edades tempranas. Esta tendencia de subestimación se mantiene para los mejores sitios a edades maduras y longevas.

En contraparte, la ecuación dinámica M6 (modelo base de Levakovic II) mostró mejor realismo biológico, porque las tendencias de crecimiento que describe se sobrepone de mejor manera a las trayectorias observadas en todos los niveles de IS y en todo el intervalo de edad analizado. Por esta razón, la ecuación M6 se seleccionó para describir el patrón de crecimiento en altura dominante y para clasificar la productividad de rodales naturales de *P. chiapensis* en la zona de estudio. Esta selección ratifica lo señalado por Özçelik et al. (2019), en el sentido de que las funciones con los mejores estadísticos de ajuste no siempre reproducen de mejor manera las tendencias observadas. En este caso, estadísticamente, la ecuación M6 se posicionó en el antepenúltimo lugar; sin embargo, dado el realismo biológico que recrea, es claro que tiene la capacidad predictiva más alta. Esta elección más que un ejercicio puro de inferencia estadística fue producto de un compromiso y balance entre desempeño estadístico y razones biológicas. La ecuación M6 tiene parsimonia con solo dos parámetros, suficientes para revelar las verdaderas tendencias de crecimiento en las alturas dominantes observadas.

Con los valores de los parámetros de la ecuación dinámica M6 y una  $E_b = 50$  años, se construyeron curvas de IS para tres niveles de productividad etiquetadas como baja, media y alta, cuyos valores medios corresponden a los IS de 25, 32 y 39 m, respectivamente (Figura 3a). Estas curvas junto con sus límites respectivos, en particular el inferior y superior de las clases baja y alta, cubrieron la amplitud y las tendencias de todas las series de crecimiento en el intervalo de edad analizado. Por esta razón, las clases de IS establecidas se consideraron suficientes para la clasificación de la productividad de los rodales naturales de *P. chiapensis* en la zona de estudio.

El enfoque de DAG para generar la ecuación M6 en combinación con la técnica de variables Dummy para



**Figure 3. Graphical comparison of the site index (SI) curves generated by the (a) new dynamic equation and (b) the model of Rodríguez-Acosta and Arteaga-Martínez (2005).**

**Figura 3. Comparativo gráfico de las curvas de índice de sitio (IS) generadas por (a) la nueva ecuación dinámica y (b) el modelo de Rodríguez-Acosta y Arteaga-Martínez (2005).**

29.7 and 35.5 m ( $E_b = 50$  years), heights determined by the model proposed by Sánchez and Del Castillo (2001). These authors used data from temporal sample plot and fitted linear models by growth condition in the estimation of SI for even-aged natural stands of *P. chiapensis* in the Sierra Norte de Oaxaca, Mexico. This difference suggests that growth conditions given by physical and environmental conditions at the Veracruz and Puebla sites are comparatively better. Del Castillo et al. (2009) report that long-lived individual trees of this species, in the best seasonal qualities, can reach heights of up to 50 m, as evidenced by the observations of the present study for the high IS class.

An analysis of the polymorphic function derived by algebraic difference approach—with the Hossfeld IV base model, developed by Fierros-Mateo, De los Santos-Posadas, Fierros-González, and Cruz-Cobos (2017) for the same species, showed that with an  $E_b = 8$  years and SI classes of 6, 10, and 14 m, the dominant height growth of the observed data could be modeled acceptably up to 20 years; subsequently, it tends to a maximum asymptotic ceiling of 33 m, which is lower than the maximum observed heights. This disparity, even though the study area was similar (UMAFOR 2103), can be explained by the fact that this study processed information from young commercial plantations with an age range of 1 to 8 years.

ajustarla, aunado a las correcciones de autocorrelación y heterocedasticidad, logran una ecuación dinámica robusta para realizar predicciones fiables. Este aspecto se aprecia mejor al contrastar las curvas de IS con las que reproduce el modelo de IS propuesto por Rodríguez-Acosta y Arteaga-Martínez (2005) (Figura 3b), que corresponde a un modelo polimórfico, cuyo modelo base es el de Chapman-Richards. Se evidencia que para una  $E_b = 50$  años y los valores de IS referidos, el modelo polimórfico no describe adecuadamente el crecimiento en altura dominante de *P. chiapensis*. La mayor deficiencia se aprecia para la clase de IS alta, donde las tendencias de crecimiento son ilógicas porque las curvas colapsan, debido a que el valor de la asíntota horizontal del modelo es menor que la altura real que los datos observados sugieren. Las diferencias pueden explicarse desde el punto de vista matemático-estadístico, porque para generar el modelo polimórfico usaron el enfoque de diferencias algebraicas, en el que solo el parámetro de forma fue dependiente del sitio y, además, no se corrigieron la autocorrelación ni la heterocedasticidad.

Las alturas dominantes de 25, 32 y 39 m estimadas por la ecuación nueva, que equivalen a los valores de IS ( $E_b = 50$  años), son ligeramente superiores a 24.2, 29.7 y 35.5 m ( $E_b = 50$  años), alturas determinadas mediante el modelo propuesto por Sánchez y Del



With SI values of 25, 32 and 39 m and  $E_b = 50$  years, the dynamic equation in GADA of the Chapman-Richards base model ( $a = \exp(\chi)$  and  $c = (\beta_2 + \beta_3)/\chi$ ), reported in the SiBiFor platform by Vargas-Larreta et al. (2017) for the same species in UMAFOR 1203 in the state of Guerrero, tends to make predictions higher than those of the M6 model, especially in the medium and high SI quality; whereas, with the low SI it underestimates up to 20 years and then overestimates. The overestimation for the three SI is maintained up to 50 years, then tends to asymptotic ceilings of 26, 33 and 40 m for the low, medium and high SI, respectively; such values are lower than the maximum observed trajectories. In this regard, even though in the present study and in that of Vargas-Larreta et al. (2017) specimens with natural regeneration regime and stem analysis technique were used, the behavior suggests that the station qualities in the study area are better.

Expressions 1 and 2, whose  $X_0$  component is shown in Table 2, derived from the dynamic equation M6, are useful for building MAI and CAI curves per SI class. While expressions 3 and 4, derived from the same equation, are useful to determine the maximum mean annual increment ( $MAI_{max}$ ) and the maximum current annual increment ( $CAI_{max}$ ) by productivity level.

$$MAI = \frac{\exp(\chi_0) \left( \frac{t}{\beta_2 + t} \right)^{\beta_1 \chi_0}}{t} \quad (1)$$

$$CAI = \frac{\beta_1 \beta_2 \left( \frac{t}{\beta_2 + t} \right)^{\beta_1 \chi_0} \exp(\chi_0)}{t(\beta_2 + t)\chi_0} \quad (2)$$

$$MAI_{max} = \frac{\beta_2(\beta_1 - \chi_0)}{\chi_0} \quad (3)$$

$$CAI_{max} = \frac{1}{2} \frac{\beta_2(\beta_1 - \chi_0)}{\chi_0} \quad (4)$$

Results of the CAI, MAI and maximum increments show that the M6 equation consistently satisfies the logical assumption that the age at which such increments are reached decreases as the SI increases (Table 5). It is also satisfied that the increments are larger as the value of SI increases. In agreement with Seki and Sakici (2017) and Socha et al. (2020), it is ratified that the developed dynamic equation fully complies with the biological growth laws.

The fact that these relevant assumptions are met is consistent with Ercanlı, Kahriman, and Yavuz (2014) and Seki and Sakici (2017), that dynamic equations derived using GADA have greater flexibility to model a wide variety of growth trends. These equations meet all the desirable attributes that translate into consistency

Castillo (2001). Estos autores utilizaron datos de sitios temporales y ajustaron modelos lineales por condición de crecimiento en la estimación del IS para rodales naturales coetáneos de *P. chiapensis* en la Sierra Norte de Oaxaca, México. Esta discrepancia sugiere que las condiciones de crecimiento dadas por condiciones físicas y ambientales en los sitios de Veracruz y Puebla son comparativamente mejores. En este sentido, Del Castillo et al. (2009) refieren que árboles individuales longevos de esta especie, en las mejores calidades de estación, pueden alcanzar alturas de hasta 50 m, tal como se evidencia en las observaciones del presente estudio para la clase alta de IS.

Un análisis de la función polimórfica derivada mediante diferencias algebraicas con el modelo base de Hossfeld IV, desarrollado por Fierros-Mateo, De los Santos-Posadas, Fierros-González, y Cruz-Cobos (2017) para la misma especie, mostró que con una  $E_b = 8$  años y clases de IS de 6, 10 y 14 m, se pudo modelar el crecimiento en altura dominante de los datos observados en forma aceptable hasta los 20 años; posteriormente, tiende a un techo asintótico máximo de 33 m, el cual es menor que las alturas máximas observadas. Esta disparidad, aun cuando la zona de estudio fue similar (UMAFOR 2103), puede explicarse porque en dicho estudio se procesó información de plantaciones comerciales jóvenes con un intervalo de edad de 1 a 8 años.

Con valores de IS de 25, 32 y 39 m y  $E_b = 50$  años, la ecuación dinámica en DAG del modelo base de Chapman-Richards ( $a = \exp(\chi)$  y  $c = (\beta_2 + \beta_3)/\chi$ ), reportada en la plataforma SiBiFor por Vargas-Larreta et al. (2017) para la misma especie en la UMAFOR 1203 del estado de Guerrero, tiende a realizar predicciones superiores a las del modelo M6, sobre todo en la calidad de IS media y alta; en tanto que, con el IS bajo subestima hasta los 20 años y después sobrestima. La sobrestimación para los tres IS se mantiene hasta los 50 años, después tiende a techos asintóticos de 26, 33 y 40 m para los IS bajo, medio y alto, respectivamente; tales valores son inferiores a las trayectorias máximas observadas. En este sentido, aun cuando en el presente trabajo como en el de Vargas-Larreta et al. (2017) se utilizaron ejemplares con régimen de regeneración natural y la técnica de análisis troncal, el comportamiento sugiere que las calidades de estación en el área de estudio son mejores.

Las expresiones 1 y 2, cuyo componente  $X_0$  está indicado en el Cuadro 2, derivadas de la ecuación dinámica M6, son útiles para construir curvas de IMA e ICA por clase de IS. En tanto que las expresiones 3 y 4, derivadas de la misma ecuación, sirven para determinar el incremento medio anual máximo ( $IMA_{max}$ ) y el incremento corriente anual máximo ( $ICA_{max}$ ) por nivel de productividad.

**Table 5. Ages at which the maximum mean and current annual increments (MAI and CAI) and dominant height increments per site index (SI) class occur for *Pinus chiapensis*.**

**Cuadro 5. Edades a las que suceden los incrementos medio y corriente anual (IMA e ICA) máximos e incrementos de la altura dominante por clase de índice de sitio (IS) para *Pinus chiapensis*.**

| SI class<br>(m)/<br>Clase de IS<br>(m) | Age MAI <sub>max</sub><br>(years)/<br>Edad IMA <sub>max</sub><br>(años) | MAI <sub>max</sub><br>(m·yr <sup>-1</sup> )/<br>IMA <sub>max</sub><br>(m·año <sup>-1</sup> ) | Age CAI <sub>max</sub><br>(year)/<br>Edad ICA <sub>max</sub><br>(años) | CAI <sub>max</sub><br>(m·yr <sup>-1</sup> )/<br>ICA <sub>max</sub><br>(m·año <sup>-1</sup> ) |
|--|---|--|--|--|
| 25                                     | 12.40   | 0.80   | 6.20   | 0.95   |
| 32                                     | 11.08   | 1.07   | 5.54   | 1.25   |
| 39                                     | 10.11   | 1.35   | 5.05   | 1.57   |

and biological realism, so they should be used to model natural and artificial forest growth. Hereby, it is considered that, for the development of new SI dynamic equations in Mexico, the use of the GADA should be prioritized and that two site-specific parameters should be used in each base growth model. Furthermore, some fitting method that is invariant to the base age should be used, such as the Dummy variable method (Sghaier et al., 2012), the nested iterative procedure (Sharma, Brunner, Eid, & Øyen, 2011) or the mixed effects model technique (Tamarit-Urias et al., 2014). Autocorrelation and heteroscedasticity should also be corrected to obtain more robust models that meet the theoretical assumptions of regression analysis. This will allow to be at the level of the international trend since, as Özçelik et al. (2019) refer, it is common that when data from stem analysis or permanent plots with remeasurements are available, the referred mathematical and statistical refinements are used.

By contrasting the ages when optimal technical rotation occurs (MAI = CAI) at the dominant height, per SI class of the dynamic equation M6, it is inferred that *P. chiapensis* tends to constant growth rates in the study area. This is because the differences in occurrence are small, leading to the fact that the SI curves could be considered quasianamorphic. This growth trend was also observed by Calegario, Daniels, Maestri, and Neiva (2005) in clones of the genus *Eucalyptus* in the states of Bahia and Espírito in Brazil.

## Conclusions

The developed dynamic site index equation, derived from the Levakovic II growth model, has a biological basis and solid mathematical-statistical rigor; in addition, it generates polymorphic curves with variable asymptotes that closely match the reality of the observed growth. Moreover, the equation meets desirable logical attributes among which

$$IMA = \frac{\exp(\chi_0) \left( \frac{t}{\beta_2 + t} \right)^{\beta_1 \chi_0}}{t} \quad (1)$$

$$ICA = \frac{\beta_1 \beta_2 \left( \frac{t}{\beta_2 + t} \right)^{\beta_1 \chi_0} \exp(\chi_0)}{t(\beta_2 + t)\chi_0} \quad (2)$$

$$IMA_{max} = \frac{\beta_2(\beta_1 - \chi_0)}{\chi_0} \quad (3)$$

$$ICA_{max} = \frac{1}{2} \frac{\beta_2(\beta_1 - \chi_0)}{\chi_0} \quad (4)$$

Las determinaciones de ICA, IMA y los incrementos máximos evidencian que la ecuación M6 satisface consistentemente el supuesto lógico de que la edad a la que se alcanzan tales incrementos decrece conforme el IS aumenta (Cuadro 5). También se cumple que los incrementos son mayores a medida que el valor del IS es mayor. De acuerdo con Seki y Sakici (2017) y Socha et al. (2020), se ratifica que la ecuación dinámica desarrollada cumple a cabalidad con las leyes de crecimiento biológico.

El hecho de que se cumplan estos supuestos relevantes coincide con lo referido por Ercanlı, Kahrıman, y Yavuz (2014) y por Seki y Sakici (2017), en el sentido de que las ecuaciones dinámicas derivadas mediante DAG poseen mayor flexibilidad para modelar una variedad amplia de tendencias de crecimiento. Tales ecuaciones cumplen con todos los atributos deseables que se traducen en consistencia y realismo biológico, por lo que deben de ser utilizadas para modelar el crecimiento de bosques naturales y artificiales. En este contexto, se considera que, para el desarrollo de nuevas ecuaciones dinámicas de IS en México, se debe priorizar el uso del enfoque de DAG y que sean dos los parámetros específicos del sitio en cada modelo de crecimiento base que se utilice. Además, se debe usar algún método de ajuste que sea

biological realism, invariance to base and path age, flexibility, parsimony and consistency stand out. Its use is recommended as a current and reliable tool for silvicultural management for predicting dominant height growth and determining the productive potential of natural stands of *Pinus chiapensis* in Puebla and Veracruz, Mexico. The equation can be used as a basic component of growth and timber yield systems. This new equation showed better performance due to a superior predictive capacity compared to a previous polymorphic site index model for the same species and region.

### End of English version

### References / Referencias

- Akbas, U., & Senyurt, M. (2018). Site quality estimations based on the generalized algebraic difference approach: a case study in Çankiri forests. *Revista Árvore*, 42(3), e420311. doi: 10.1590/1806-90882018000300011
- Burkhardt, H. E., & Tomé, M. (2012). *Modeling forest trees and stands*. New York, NY, USA: Springer-Verlag.
- Calegario, N., Daniels, R. F., Maestri, R., & Neiva, R. (2005). Modeling dominant height growth based on nonlinear mixed-effects model: a clonal *Eucalyptus* plantation case study. *Forest Ecology and Management*, 204(1), 11–21. doi: 10.1016/j.foreco.2004.07.051
- Cancino, J., Acuña, E., & Espinosa, M. (2013). Combining ring counting and ring width for estimating height in stem analysis. *Forest Science*, 59(6), 599–609. doi: 10.5849/forsci.12-028
- Chávez-Pascual, E. Y., Rodríguez-Ortiz, G., Carrillo-Rodríguez, J. C., Enríquez-del Valle, J. R., Chávez-Servia, J. L., & Campos-Ángeles, G. V. (2013). Factores de expansión de biomasa aérea para *Pinus chiapensis* (Mart.) Andresen. *Revista Mexicana de Ciencias Agrícolas*, 6, 1273–1284. Retrieved from [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2007-09342013001000018](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-09342013001000018)
- Del Castillo, R. F., Trujillo, A. S., & Saénz-Romero, C. (2009). *Pinus chiapensis*, a keystone species: Genetics, ecology, and conservation. *Forest Ecology and Management*, 257(11), 2201–2208. doi: 10.1016/j.foreco.2009.03.004
- Ercanli, İ., Kahriman, A., & Yavuz, H. (2014). Dynamic base-age invariant site index models based on generalized algebraic difference approach for mixed Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Oriental beech (*Fagus orientalis* Lipsky) stands. *Turkish Journal of Agriculture and Forestry*, 38(1), 134–147. doi: 10.3906/tar-1212-67
- Fierros-Mateo, R., De los Santos-Posadas, H. M., Fierros-González, M. A., & Cruz-Cobos, F. (2017). Crecimiento y rendimiento maderable en plantaciones de *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen. *Agrociencia*, 51(2), 201–214. Retrieved from <https://agrociencia-colpos.mx/index.php/agrociencia/article/view/1287/1287>

invariante de la edad base, tal como el de variables Dummy (Sghaier et al., 2012), el procedimiento iterativo anidado (Sharma, Brunner, Eid, & Øyen, 2011) o bien la técnica de modelo de efectos mixtos (Tamarit-Urias et al., 2014). También se debe corregir la autocorrelación y la heterocedasticidad para obtener modelos más robustos que cumplan con los supuestos teóricos del análisis de regresión. Esto permitirá estar al nivel de la tendencia internacional ya que, como refieren Özçelik et al. (2019), es común que cuando se disponga de datos provenientes de análisis troncales o de parcelas permanentes con remediciones se usen los refinamientos matemáticos y estadísticos referidos.

Mediante el contraste de las edades en que ocurren los turnos técnicos (IMA = ICA) en la altura dominante, por clase de IS de la ecuación dinámica M6, se infiere que *P. chiapensis* tiende a tasas constantes de crecimiento en la zona de estudio. Lo anterior debido a que las diferencias en la ocurrencia son pequeñas, efecto que conduce a que las curvas de IS pudieran considerarse de tipo cuasianamórficas. Esta tendencia de crecimiento también fue observada por Calegario, Daniels, Maestri, y Neiva (2005) en clones del género *Eucalyptus* en los estados Bahía y Espíritu de Brasil.

### Conclusiones

La ecuación dinámica desarrollada de índice de sitio, derivada del modelo de crecimiento de Levakovic II, tiene base biológica y rigor matemático-estadístico sólido; además, genera curvas polimórficas con asíntotas variables que se apegan con fidelidad a la realidad del crecimiento observado. Asimismo, la ecuación cumple con atributos deseables lógicos entre los que destacan realismo biológico, invarianza con respecto a la edad base y de ruta, flexibilidad, parsimonia y consistencia. Se recomienda su uso como una herramienta actual y fiable para la gestión silvícola en términos de la predicción del crecimiento en altura dominante y determinación del potencial productivo de rodales naturales de *Pinus chiapensis* en Puebla y Veracruz, México. La ecuación podrá utilizarse como componente básico de sistemas de crecimiento y rendimiento maderable. Esta ecuación nueva presentó mejor desempeño dado por una capacidad predictiva superior, comparada con un modelo polimórfico de índice de sitio previo para la misma especie y región.

Fin de la versión en español

- Guerra-Hernández, J., Arellano-Pérez, S., González-Ferreiro, E., Pascual, A., Altelarrea, V. S., Ruiz-González, A. D., & Álvarez-González, J. G. (2021). Developing a site index model for *P. pinaster* stands in NW Spain by combining bi-temporal ALS data and environmental data. *Forest Ecology and Management*, 481, 118690. doi: 10.1016/j.foreco.2020.118690
- Hernández-Cuevas, M., Santiago-García, W., De los Santos-Posadas, H. M., Martínez-Antúnez, P., & Ruiz-Aquino, F. (2018). Modelos de crecimiento en altura dominante e índices de sitio para *Pinus ayacahuite* Ehren. *Agrociencia*, 52(3), 437–453. Retrieved from <https://agrociencia-colpos.mx/index.php/agrociencia/article/view/1680/1680>
- Özçelik, R., Cao, V. Q., Gómez-García, E., Crecente-Campo, F., & Eler, Ü. (2019). Modeling dominant height growth of cedar (*Cedrus libani* A. Rich) stands in Turkey. *Forest Science*, 65(6), 725–733. doi: 10.1093/forsci/fxz038
- Panik, M. J. (2014). *Growth curve modeling: Theory and applications*. Hoboken, NJ, USA: Wiley.
- Perry, J. P. (2009). *The pines of Mexico and Central America*. Portland, OR, USA: Timber Press.
- Pretzsch, H. (2009). *Forest dynamics, growth and yield. From measurement to model*. Berlin, Germany: Springer.
- Pretzsch, H., Dauber, E., & Biber, P. (2013). Species-specific and ontogeny-related stem allometry of european forest trees: Evidence from extensive stem analyses. *Forest Science*, 59(3), 290–302. doi: 10.5849/forsci.11-102
- Pyo, J. (2017). Developing the site index equation using a generalized algebraic difference approach for *Pinus densiflora* in central region, Korea. *Forest Science and Technology*, 13(2), 87–91. doi: 10.1080/21580103.2017.1308889
- Quiñonez-Barraza, G., De los Santos-Posadas, H. M., Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Site index with complex polymorphism of forest stands in Durango, Mexico. *Agrociencia*, 49(4), 439–454. Retrieved from [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1405-31952015000400007](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-31952015000400007)
- Quiñonez-Barraza, G., García-Espinoza, G. G., & Aguirre-Calderón, O. A. (2018). How to correct the heteroscedasticity and autocorrelation of residuals in taper and height growth models? *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 9(49), 28–59. doi: 10.29298/rmcf.v9i49.151
- Rodríguez-Acosta, M., & Arteaga-Martínez, B. (2005). Índice de sitio para *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen, en los estados de Veracruz y Puebla, México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 11(1), 39–44. Retrieved from <https://revistas.chapingo.mx/forestales/revista/articulos/viewer.html?file=rchscfaXI428.pdf>
- Ruiz-Jiménez, C. A., Téllez-Valdés, O., & Luna-Vega, I. (2012). Clasificación de los bosques mesófilos de montaña de México: afinidades de la flora. *Revista Mexicana de Biodiversidad*, 83, 1110–1144. doi: 10.7550/rmb.29383
- Ryan, T. P. (2009). *Modern regression methods*. New York, USA: Wiley.
- Sánchez, V. N. M., & Del Castillo, S. R. F. (2001). Calidad de estación para *Pinus chiapensis* (Mart.) Andresen en El Rincón, Oaxaca, México. *Foresta Veracruzana*, 3(2), 9–12. Retrieved from <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=49703202>
- Seki, M., & Sakici, O. E. (2017). Dominant height growth and dynamic site index models for Crimean pine in Kastamonu-Taşköprü region of Turkey. *Canadian Journal of Forest Research*, 47(11), 1441–1449. doi: 10.1139/cjfr-2017-0131
- Sghaier, T., Palahi, M., Garchi, S., Bonet, J. A., Ammari, Y., & Pique, M. (2012). Modeling dominant height growth in planted *Pinus pinea* stands in Northwest of Tunisia. *International Journal of Forestry Research*, ID 902381. doi: 10.1155/2012/902381
- Sharma, R. P., Brunner, A., Eid, T., & Øyen, B. H. (2011). Modelling dominant height growth from national forest inventory individual tree data with short time series and large age errors. *Forest Ecology and Management*, 262(12), 2162–2175. doi: 10.1016/j.foreco.2011.07.037
- Socha, J., Tyminska-Czabańska, L., Grabska, E., & Orzel, S. (2020). Site index models for main forest-forming tree species in Poland. *Forests*, 11, 301. doi: 10.3390/f11030301
- Sprengel, L., Spiecker, H., & Wu, S. (2022). Two subject specific modelling approaches to construct base-age invariant polymorphic site index curves with varying asymptotes. *Silva Fennica*, 56(1), 10544. doi: 10.14214/sf.10544
- Statistical Analysis System (SAS Institute Inc.) (2011). *SAS/STAT User's Guide*, version 9.3. Cary, NC, USA: Author.
- Subedi, N., & Sharma, M. (2010). Evaluating height-age determination methods for Jack pine and black spruce plantations using stem analysis data. *Northern Journal of Applied Forestry*, 27(2), 50–55. doi: 10.1093/njaf/27.2.50
- Tamarit-Urias, J. C., De los Santos-Posadas, H. M., Aldrete, A., Valdez-Lazalde, J. R., Ramírez-Maldonado, H., & Guerra-De la Cruz, V. (2014). Ecuaciones dinámicas de índice de sitio para *Tectona grandis* en Campeche, México. *Agrociencia*, 48(2), 225–238. Retrieved from <https://www.agrociencia-colpos.mx/index.php/agrociencia/article/view/1077/1077>
- Tewari, V. P., & Singh, B. (2018). Total wood volume equation for *Tectona grandis* Linn F. stands in Gujarat, India. *Journal of Forest and Environmental Science*, 34(4), 313–320. doi: 10.7747/JFES.2018.34.4.313
- Trim, K. R., Coble, D. W., Weng, Y., Stovall, J. P., & Hung, I. K. (2020). A new site index model for intensively managed loblolly pine (*Pinus taeda*) plantations in the west Gulf Coastal Plain. *Forest Science*, 66(1), 2–13. doi: 10.1093/forsci/fxz050
- Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Aguirre-Calderón, O. A., López-Martínez, J. O., de los Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F. J., . . . Aguirre-Calderón, C. G. (2017). SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3), 437–455. doi: 10.5154/r.rchscfa.2017.06.040

