

Maximum density and density management diagram for mixed-species forests in Durango, Mexico

Densidad máxima y diagrama de manejo de la densidad para bosques mezclados de Durango, México

Gerónimo Quiñonez-Barraza^{1*}; Juan C. Tamarit-Urias²; Martín Martínez-Salvador³; Xavier García-Cuevas⁴; Héctor M. de los Santos-Posadas⁵; Wenceslao Santiago-García⁶

¹Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias (INIFAP), Campo Experimental Valle del Guadiana. km 4.5 Carretera Durango-Mezquital. C. P. 34170. Durango, Durango, México.

²INIFAP, Campo Experimental San Martinito. km 56.5 Carretera México-Puebla. C. P. 74100. Tlahuapan, Puebla, México.

³INIFAP, Campo Experimental Delicias. km 33.3 Carretera a Ojinaga. C. P. 32910. Aldama, Chihuahua, México.

⁴INIFAP, Campo Experimental Chetumal. km 25 Carretera Chetumal-Bacalar. C. P. 77000. Chetumal, Quintana Roo, México.

⁵Colegio de Postgraduados, Postgrado en Ciencias Forestales. km 36.5 Carretera México-Texcoco. C. P. 56230. Texcoco, Estado de México, México.

⁶Universidad de la Sierra Juárez, Instituto de Estudios Ambientales-División de Estudios de Postgrado. Av. Universidad s/n. C. P. 68725. Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México.

*Corresponding author: quinonez.geronimo@inifap.gob.mx, tel.: +52 (618) 158 7865

Abstract

Introduction: Stand density affects productivity and the structure and functions of forests.

Objectives: To compare maximum density lines for mixed-species forests adjusted with Ordinary least Squares (OLS) and Stochastic Frontier Regression (SFR); and generate a density management diagram (DMD) to prescribe thinning.

Materials and methods: The data was obtained in mixed-species stands from the Forest Management Unit 1005 “Santiago Papasquiario y Anexos” in Durango, Mexico. The density-size relationship was established using the Reineke’s model. The maximum density line was adjusted with OLS and SFR, the latter with the half-normal (H-N), normal-exponential (N-E) and normal-truncated (N-T) approaches. The DMD was constructed with the SFR equation with the normal-truncated distribution approach.

Results and discussion: The maximum density line, modeled through SFR with N-T approach showed better fit to the upper limit of the maximum density of the mixed-species stand data. DMD suggests that thinning for these stands can be applied with high cutting intensities, contrary to conventional practices, where rarely more than 30 % of the basal area or volume is cut.

Conclusion: The maximum density line for mixed-species forests in Durango, Mexico, was generated with stochastic frontier regression, as a normal-truncated model.

Keywords. Self-thinning, growth space, Stand Density Index, stochastic frontier regression, Reineke.

Resumen

Introducción: La densidad del rodal impacta en la productividad y en la estructura y funciones de los bosques.

Objetivos: Comparar las líneas de densidad máxima para bosques mezclados, ajustadas con mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y regresión frontera estocástica (RFE), y generar un diagrama de manejo de la densidad (DMD) para prescribir aclareos.

Materiales y métodos: Los datos se obtuvieron en rodales mezclados de la Unidad de Manejo Forestal 1005 “Santiago Papasquiario y Anexos” en Durango, México. La relación funcional densidad-tamaño se estableció con el modelo de Reineke. La línea de densidad máxima se ajustó con MCO y RFE, este último con los enfoques seminormal (N-H), normal-exponencial (N-E) y normal-truncada (N-T). El DMD se construyó con la ecuación de RFE con el enfoque de distribución normal-truncada.

Resultados y discusión: La línea de densidad máxima, modelada vía RFE con enfoque N-T, mostró mejor ajuste al límite superior de la densidad máxima de los datos de rodales mezclados. El DMD sugiere que los aclareos para estos rodales pueden aplicarse con intensidades de corta altas, a pesar de las prácticas convencionales, donde raramente se remueve más del 30 % del área basal o volumen.

Conclusión: La línea de densidad máxima para bosques mezclados de Durango, México, se generó objetivamente con regresión frontera estocástica, como un modelo normal-truncado.

Palabras clave. Autoaclareo, espacio de crecimiento, índice de densidad de rodales, regresión frontera estocástica, Reineke.

Introduction

In forestry research, there are several methods to characterize the structure and density of mixed-species and uneven-aged stands. The maximum density can occur after crowns closure is complete, but this is rarely observed because, generally, the canopy of a stand presents empty spaces; the proportion of these is greater as the trees grow. Therefore, the actual condition of density fluctuates around a level of equilibrium called normal density and can approach the maximum under unusual growth conditions, when most growth spaces are covered (Zeide, 2004).

Relative density functions or measures describe the degree of clumping of trees that form a stand or forest, in relation to a standard density condition (Torres-Rojo & Velázquez-Martínez, 2000). The most used in forestry research are based on the Reineke's density index (Reineke, 1933), tree-area ratio (Chisman & Schumacher, 1940), relative space index (Wilson, 1946), crown competition factor (Krajicek, Brinkman, & Gingrich, 1961), Yoda's density index (Yoda, Tatuó, Husato, & Kazuo, 1963) and in the relative density index (Curtis, 1970; Drew & Flewelling, 1979). These measures were developed assuming specific conditions in the stands, such as the homogeneous composition of species and specific age distribution; however, it is difficult to find these characteristics in forests with forest management (Torres-Rojo & Velázquez-Martínez, 2000). The simplest measure of density is the number of trees per unit area, which is used successfully to quantify the density or competition in a growing space and the size of the trees in a stand (Burkhart, 2013).

During the growth and development of trees in a stand, intense competition for light, nutrients and growth space can induce mortality; this process is known as dense-dependent, mortality or self-thinning (Pretzsch, 2009; Yoda et al., 1963). The self-thinning "law" or rules of Reineke (Reineke, 1933) and Yoda (Yoda et al., 1963) assume a common slope between the logarithm of average tree size and the logarithm of the density or number of trees per unit of area (-1.605 for Reineke and -1.5 for Yoda), for mixed-species stands in the maximum density line (Burkhart, 2013).

The density-size relationship, maximum density and self-thinning have been modeled for even-aged stands and, occasionally, for uneven-aged stands. Some of the studies carried out are the following: Cao, Dean, and Baldwin (2000) described the changes between the mean square diameter and the density in stands with the presence of self-thinning of *Pinus elliottii* Engelm.; Torres-Rojo and Velázquez-Martínez (2000) created a model of relative density based on the Reineke's density index for mixed-species stands; Bi, Wan, and Turvey

Introducción

En la investigación forestal existen varios métodos para caracterizar la estructura y densidad de rodales mezclados e incoetáneos. La densidad máxima puede ocurrir cuando el cierre de copas es completo, pero esto se observa raramente debido a que, por lo general, el dosel de un rodal presenta espacios vacíos; la proporción de estos es mayor a medida que los árboles crecen. Por tanto, el estado real de la densidad fluctúa alrededor de un nivel de equilibrio denominado densidad normal y puede aproximarse al máximo en condiciones inusuales de crecimiento, cuando la mayoría de los espacios de crecimiento son cubiertos (Zeide, 2004).

Las medidas o funciones de densidad relativa describen el grado de aglutinamiento de los árboles que forman un rodal o bosque, con relación a una condición estándar de densidad (Torres-Rojo & Velázquez-Martínez, 2000). Las más usadas en la investigación forestal se basan en el índice de densidad de Reineke (Reineke, 1933), razón árbol-área (Chisman & Schumacher, 1940), índice de espacio relativo (Wilson, 1946), factor de competencia de copas (Krajicek, Brinkman, & Gingrich, 1961), índice de densidad de Yoda (Yoda, Tatuó, Husato, & Kazuo, 1963) y en el índice de densidad relativa (Curtis, 1970; Drew & Flewelling, 1979). Estas medidas fueron desarrolladas asumiendo condiciones específicas en los rodales, tales como la composición homogénea de especies y distribución específica de edades; sin embargo, es difícil encontrar estas características en bosques con manejo forestal (Torres-Rojo & Velázquez-Martínez, 2000). La medida de densidad más sencilla es el número de árboles por unidad de superficie, la cual se usa exitosamente para cuantificar la densidad o competencia en un espacio de crecimiento y el tamaño de los árboles en un rodal (Burkhart, 2013).

Durante el crecimiento y desarrollo de los árboles en un rodal, la competencia intensa por la luz, nutrientes y espacio de crecimiento puede ocasionar mortalidad; este proceso es conocido como denso-dependiente, mortalidad o autoaclareo (Pretzsch, 2009; Yoda et al., 1963). La "ley" de autoaclareo o reglas de Reineke (Reineke, 1933) y Yoda (Yoda et al., 1963) asumen una pendiente común entre el logaritmo del tamaño promedio de árboles y el logaritmo de la densidad o número de árboles por unidad de superficie (-1.605 para Reineke y -1.5 para Yoda), para rodales mezclados en la línea de densidad máxima (Burkhart, 2013).

La relación funcional densidad-tamaño, densidad máxima y autoaclareo se han modelado para rodales coetáneos y, ocasionalmente, para rodales incoetáneos. Algunas de las investigaciones realizadas son las siguientes: Cao, Dean, y Baldwin (2000) describieron

(2000) estimated the upper line of the self-thinning for biomass and density of *Pinus radiata* D. Don with the econometric procedure known as the stochastic frontier function for even-aged stands; Long and Shaw (2005) generated a density management diagram for uneven-aged stands of *Pinus ponderosa* Douglas ex C. Lawson with forest inventory data; Comeau, White, Kerr, and Hale (2010) studied the maximum density relationship for *Picea sitchensis* (Bong.) Carr. and *Pseudotsuga menziessii* Mirb. Franco using density models for even-aged and continuous cover stands; García (2012) studied the principles of density “laws” or self-thinning rules and created density management diagrams for stands with and without thinning; Burkhart (2013) studied the behavior of diameter, height and volume to estimate the number of trees in self-thinning stands and the prediction of growth in stands with different age, density and site index; Reyes-Hernandez, Comeau, and Bokalo (2013) evaluated the density-size relationship in pure and mixed-species stands of *Populus tremuloides* Michx. and *Picea glauca* (Moench) Voss, with the stochastic frontier regression approach and indicated that the size-density relationship can satisfactorily developed for mixed-species stands; and Santiago-García et al. (2013) determined the self-thinning line in stands of *Pinus patula* Schiede & Cham. with the stochastic frontier regression methods and ordinary least squares, for the models of Reineke and Yoda, and concluded that the first method provides an efficient alternative to estimate the maximum density line.

A density management diagram is a graphical tool that relates the stand density and the average size of trees (volume, biomass, basal area or mean square diameter) per unit area (Drew & Flewelling, 1979). Site occupation is the most important property in mixed-species stands; when there is a mixture of species in a stand, the density management study should focus on all the species present and include the interspecific and intraspecific competition.

The objectives of this study were to compare the maximum density lines of mixed-species stands with the Reineke’s model, adjusted by ordinary least squares (OLS) and stochastic frontier regression (SFR); and create a density management diagram (DMD) to prescribe thinning in mixed-species stands for timber production purposes in the state of Durango, Mexico.

Materials and methods

Study area and experimental data

The data used in the fitting of density-size relationship (number of trees per hectare based on the mean square diameter) were obtained from mixed-species forest stands at the Forest Management Unit (UMAFOR) 1005

los cambios entre el diámetro cuadrático promedio y la densidad en rodales con presencia de autoaclareo de *Pinus elliottii* Engelm.; Torres-Rojo y Velázquez-Martínez (2000) generaron un modelo de densidad relativa basado en el índice de densidad de Reineke para rodales mezclados; Bi, Wan, y Turvey (2000) estimaron la línea superior del autoaclareo para biomasa y densidad de *Pinus radiata* D. Don, con el procedimiento econométrico conocido como función frontera estocástica para rodales coetáneos; Long y Shaw (2005) generaron un diagrama de manejo de la densidad para rodales incoetáneos de *Pinus ponderosa* Douglas ex C. Lawson con datos de inventario forestal; Comeau, White, Kerr, y Hale (2010) estudiaron la relación de densidad máxima para *Picea sitchensis* (Bong.) Carr. y *Pseudotsuga menziessii* Mirb. Franco usando modelos de densidad para rodales coetáneos y de cobertura continua; García (2012) investigó los principios de las “leyes” de densidad o reglas de autoaclareo y generó diagramas de manejo de la densidad para rodales con y sin aclareos; Burkhart (2013) estudió el comportamiento del diámetro, altura y volumen para estimar el número de árboles en rodales con autoaclareo y la predicción del crecimiento en rodales con edad, densidad e índice de sitio diferentes; Reyes-Hernandez, Comeau, y Bokalo (2013) evaluaron la relación densidad-tamaño en rodales puros y mezclados de *Populus tremuloides* Michx. y *Picea glauca* (Moench) Voss, con el método de regresión frontera estocástica e indicaron que la relación tamaño-densidad puede desarrollarse satisfactoriamente para rodales mezclados; y Santiago-García et al. (2013) determinaron la línea de autoaclareo en rodales de *Pinus patula* Schiede & Cham. con los métodos regresión frontera estocástica y mínimos cuadrados ordinarios, para los modelos de Reineke y Yoda, y concluyeron que el primer método provee una alternativa eficiente para estimar la línea de densidad máxima.

Un diagrama de manejo de la densidad es una herramienta gráfica que relaciona la densidad del rodal y el tamaño promedio de árboles (volumen, biomasa, área basal o diámetro cuadrático promedio) por unidad de área (Drew & Flewelling, 1979). La ocupación de sitio es la propiedad más importante en los rodales mezclados; si en un rodal existe mezcla de especies, el estudio de manejo de la densidad debe enfocarse en todas las especies presentes e incluir la competencia interespecífica e intraespecífica.

Los objetivos de esta investigación fueron comparar las líneas de densidad máxima de rodales mezclados con el modelo de Reineke, ajustado por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y regresión frontera estocástica (RFE); y generar un diagrama de manejo de la densidad (DMD) para prescribir aclareos en rodales mezclados con propósitos de producción maderable en el estado de Durango, México.

“Santiago Papasquiario y Anexos” in Durango, Mexico (Figure 1). The study area is located in the northwest region of the state of Durango, between 24° 30' - 25° 27' N and 105° 01' - 106° 24' W. The total area of the UMAFOR 1005 is 859 496.59 ha, of which there are 639 936.77 ha of timber production, 120 014.95 ha of restoration, 32 510.60 ha of protection and 67 034.27 ha for other uses (agriculture, livestock and grassland). The predominant climates are cold temperate with cold summers and mean annual temperature between 5 and 12 °C, and subhumid temperate with mean annual temperature between 12 and 18 °C. The warmest season is from May to June with maximum temperatures of 26 to 28 °C; the minimum temperatures vary from -4 to -6 °C in December and January (García, 1981).

A total of 1 760 circular plots from the forest inventory of 0.10 ha, distributed close to the maximum density line, were used for this study to fit the number of trees per hectare (N) and the mean square diameter (Dg) as a Reineke's model (Reineke, 1933). Table 1 shows the descriptive statistics of the dataset for the adjustment of the density-size relationship (N-Dg) for mixed-species forests.

The dataset of inventory plots included the proportion of trees per species in relation to the total number of trees: *Pinus durangensis* Martínez (23.37 %), *P. arizonica* Engelmännii (8.40 %), *P. leiophylla* Schlecht. & Cham. (2.41 %), *P. teocote* Schlecht. & Cham. (12.85 %), *P. engelmannii* Carr. (0.76 %), *P. lumholtzii* B. L. Rob. & Fernald (0.91 %), *P. ayacahuite* Ehrenb. (10.45 %), *P. herrerae* Martínez (0.15 %), *Quercus sideroxyla* Humb. & Bonpl. (12.80 %), *Q. durifolia* Seem (11.01 %), *Q. resinosa* Liebm.

Materiales y métodos

Área de estudio y datos experimentales

Los datos usados en el ajuste de la relación funcional densidad-tamaño (número de árboles por hectárea en función del diámetro cuadrático promedio) se obtuvieron en rodales mezclados de bosques de la Unidad de Manejo Forestal (UMAFOR) 1005 “Santiago Papasquiario y Anexos” en Durango, México (Figura 1). El área de estudio se ubica en la región noroeste del estado de Durango, entre 24° 30' - 25° 27' LN y 105° 01' - 106° 24' LO. La superficie total de la UMAFOR 1005 es de 859 496.59 ha, de las cuales son 639 936.77 ha de producción maderable, 120 014.95 ha de restauración, 32 510.60 ha de protección y 67 034.27 ha de otros usos (agricultura, ganadería y pastizales). Los climas predominantes son templado frío con veranos fríos y temperatura media anual entre 5 y 12 °C, y templado subhúmedo con temperatura media anual entre 12 y 18 °C. La temporada más calurosa es de mayo a junio con temperaturas máximas de 26 a 28 °C; las temperaturas mínimas varían de -4 a -6 °C en los meses de diciembre y enero (García, 1981).

En este estudio se utilizaron 1 760 parcelas circulares de inventario forestal de 0.10 ha, distribuidas cercanamente debajo de la línea de densidad máxima, para ajustar el número de árboles por hectárea (N) y el diámetro cuadrático promedio (Dg) como un modelo de Reineke (Reineke, 1933). El Cuadro 1 muestra las estadísticas descriptivas de la base de datos para el ajuste de la relación funcional densidad-tamaño (N-Dg) para bosques mezclados.

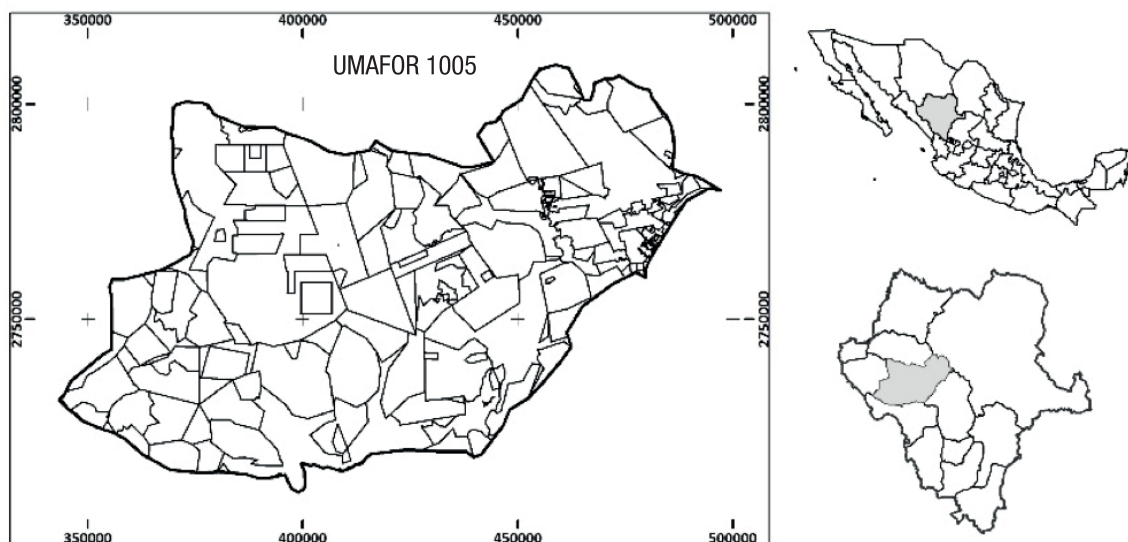


Figure 1. Location of the UMAFOR 1005 “Santiago Papasquiario y Anexos” in Durango, Mexico.

Figura 1. Localización de la UMAFOR 1005 “Santiago Papasquiario y Anexos” en Durango, México.

Table 1. Descriptive statistics of 1 760 plots from the mixed-species forest inventory of UMAFOR 1005 “Santiago Papasquiario y Anexos” in Durango, Mexico.**Cuadro 1. Estadísticas descriptivas de 1 760 parcelas de inventario de bosques mezclados de la UMAFOR 1005 “Santiago Papasquiario y Anexos” en Durango, México.**

Variable	Mean / Media	SD / DE	Minimum / Mínimo	Maximum / Máximo
G (m ² ·ha ⁻¹)	28.00	8.38	4.27	65.31
Vta (m ³ ·ha ⁻¹)	269.32	114.83	53.87	837.30
Vtap (m ³)	0.79	0.62	0.07	4.09
H0 (m)	16.64	5.26	6.00	39.00
D0 (cm)	37.04	10.52	10.00	100.00
A (years) / A (años)	102.65	27.63	27.00	290.00
SI (m) / IS (m)	22.81	8.19	10.00	35.00
Dg (cm)	29.74	8.45	12.60	56.57
N (trees·ha ⁻¹) / N (árboles·ha ⁻¹)	502.00	277.00	20.00	1 415.00

G = basal area, Vta = total volume of the tree, Vtap = total volume of the tree average per tree, H0 = dominant height, D0 = dominant diameter, A = average age, SI = site index of the dominant species of the genus *Pinus*, at a reference age of 60 years (the SI was estimated with the equation reported by Quiñonez-Barraza et al., 2015), Dg = Mean square diameter, estimated as $Dg = [(G/N)/(\pi/40000)]^{0.5}$, N = density and SD = standard deviation of the mean.

G = área basal, Vta = volumen total del árbol, Vtap = volumen total árbol promedio por árbol, H0 = altura dominante, D0 = diámetro dominante, A = edad promedio, IS = índice de sitio de la especie dominante del género *Pinus*, a una edad de referencia de 60 años (el IS fue calculado con la ecuación reportada por Quiñonez-Barraza et al., 2015), Dg = diámetro cuadrático promedio, estimado como $Dg = [(G/N)/(\pi/40000)]^{0.5}$, N = densidad y DE = desviación estándar de la media.

(2.35 %), *Q. crassifolia* Ehrenb. (0.23 %), *Q. rugosa* Neé (1.60 %), *Juniperus deppeana* Steud. (3.76 %), *Arbutus xalapensis* Kunth (5.25 %) and *P. menziessii* (3.70 %). With respect to the global basal area, *P. durangensis* had the highest value (7.14 m²·ha⁻¹) and, as for the spatial distribution, it was associated with *Q. sideroxylla* (6.88 m²·ha⁻¹), *P. arizonica* (5.20 m²·ha⁻¹) and *P. teocote* (4.33 m²·ha⁻¹). The lowest value of the basal area was for *A. xalapensis* (1.29 m²·ha⁻¹).

Statistical analysis

In the modeling of the density-size relationship, most studies discuss the empirical validation of the self-thinning law, where the presence of subjectivity in the selection of maximum density data has become the main point of analysis. Common methods for estimating the maximum density line have been based on the use of information from stands growing at that density. Therefore, the self-thinning line is modeled, before it occurs, as the average adjusted by OLS and the result is a maximum average in contrast to an absolute

La base de datos de parcelas de inventario incluyó la proporción de árboles por especie con relación al número total de árboles: *Pinus durangensis* Martínez (23.37 %), *P. arizonica* Engelmännii (8.40 %), *P. leiophylla* Schlecht. & Cham. (2.41 %), *P. teocote* Schlecht. & Cham. (12.85 %), *P. engelmannii* Carr. (0.76 %), *P. lumholtzii* B. L. Rob. & Fernald (0.91 %), *P. ayacahuite* Ehrenb. (10.45 %), *P. herrerae* Martínez (0.15 %), *Quercus sideroxylla* Humb. & Bonpl. (12.80 %), *Q. durifolia* Seem (11.01 %), *Q. resinosa* Liebm. (2.35 %), *Q. crassifolia* Ehrenb. (0.23 %), *Q. rugosa* Neé (1.60 %), *Juniperus deppeana* Steud. (3.76 %), *Arbutus xalapensis* Kunth (5.25 %) y *P. menziessii* (3.70 %). Con respecto al área basal global, *P. durangensis* presentó el valor más alto (7.14 m²·ha⁻¹) y, en cuanto a la distribución espacial, se asoció con *Q. sideroxylla* (6.88 m²·ha⁻¹), *P. arizonica* (5.20 m²·ha⁻¹) y *P. teocote* (4.33 m²·ha⁻¹). El valor más bajo de área basal lo tuvo *A. xalapensis* (1.29 m²·ha⁻¹).

Análisis estadístico

En la modelación de la relación densidad-tamaño, la mayoría de los estudios debaten la validación

maximum, which technically should be the correct limit. This subjectivity implies that the same dataset can be analyzed to provide evidence of rejection or to draw different conclusions. The SFR method, as a production function, estimates the maximum density limit and more efficiently than OLS (Bi et al., 2000; Santiago-García et al., 2013) when the data come from temporary plots of forest inventory. This implies that all plots can be used to estimate the maximum density line (Reyes-Hernandez et al., 2013). In this study, the occupation property of the site was used to model the density of mixed-species stands, because all species represent the maximum occupation in a given condition and interspecific and intraspecific competition occur at the same time.

The Reineke's model (Reineke, 1933) was used to establish the density-size relationship (N-Dg) of mixed-species stands. The model expresses the number of trees per hectare as a function of the mean square diameter ($N = \beta_0 Dg^{\beta_1}$). The Reineke's model for OLS in the linear form is expressed as follows:

$$\ln(N) = \beta_0 + \beta_1 \ln(Dg) + \varepsilon_i$$

where,

In = natural logarithm

N = density (trees·ha⁻¹)

Dg = mean square diameter (cm)

β_0 and β_1 = Intercept and the slope parameters of the maximum density line, respectively.

ε_i = random error with the property $\varepsilon_i \sim iid N(0, \sigma^2)$.

The SFR method is considered a very efficient procedure to adjust the maximum density line when the data could present autocorrelation and heteroscedasticity (Reyes-Hernandez et al., 2013). The form and parameters of the Reineke's model, which reflect growth mechanisms, can generate controversies in biological and statistical terms, but are very efficient to describe the functional relationship N-Dg (Zeide, 2005). In addition, the model constant is a measure of intraspecific competitive capacity called self-tolerance (Zeide, 1985). The Reineke's model has been used to generate the maximum density line in pure (Cao et al., 2000) and mixed-species (Torres-Rojo & Velázquez-Martínez, 2000) forests. For SFR, the model is given by the log-log expression, such as the formulation of a Cobb-Douglas type model with two error terms (Aigner, Lovell, & Schmidt, 1977):

$$\ln(N) = \beta_0 + \beta_1 \ln(Dg) + u_i + v_i$$

where u_i is the component of the asymmetric error and v_i is the symmetric error component with the property $v_i \sim iid N(0, \sigma_v^2)$. The term v_i is distributed independent of u_i and represents the random variation in production

empírica de la ley de autoaclareo, donde la presencia de subjetividad en la selección de los datos de densidad máxima se ha convertido en el punto de análisis principal. Los métodos comunes para estimar la línea de densidad máxima se han basado en el uso de información de rodales creciendo a dicha densidad. Por tanto, la línea de autoaclareo es modelada, antes de que esta ocurra, como el promedio ajustado por MCO y el resultado es una media máxima en contraste con un máximo absoluto, el cual técnicamente debería ser el límite correcto. Esta subjetividad implica que la misma base de datos puede ser analizada para proveer evidencia de rechazo o plantear conclusiones diferentes. El método RFE, como una función de producción, estima el límite de la densidad máxima de forma objetiva y más eficiente que MCO (Bi et al., 2000; Santiago-García et al., 2013) cuando los datos provienen de parcelas temporales de inventario forestal. Esto implica que todas las parcelas de inventario pueden ser usadas para estimar la línea de densidad máxima (Reyes-Hernandez et al., 2013). En este estudio, la propiedad de ocupación del sitio se usó para modelar la densidad de rodales mezclados, debido a que todas las especies representan la ocupación máxima en una condición dada y la competencia interespecífica e intraespecífica ocurren al mismo tiempo.

El modelo de Reineke (Reineke, 1933) se utilizó para establecer la relación funcional densidad-tamaño (N-Dg) de rodales mezclados. El modelo expresa el número de árboles por hectárea como una función del diámetro medio cuadrático ($N = \beta_0 Dg^{\beta_1}$). El modelo de Reineke para MCO en la forma lineal se expresa como sigue:

$$\ln(N) = \beta_0 + \beta_1 \ln(Dg) + \varepsilon_i$$

donde,

In = logaritmo natural

N = densidad (árboles·ha⁻¹)

Dg = diámetro medio cuadrático (cm)

β_0 y β_1 = parámetros del intercepto y la pendiente de la línea de densidad máxima, respectivamente.

ε_i = error aleatorio con la propiedad $\varepsilon_i \sim iid N(0, \sigma^2)$.

El método de RFE se considera un procedimiento muy eficiente para ajustar la línea de densidad máxima cuando los datos pudieran presentar autocorrelación y heterocedasticidad (Reyes-Hernandez et al., 2013). La forma y los parámetros del modelo de Reineke, los cuales reflejan mecanismos de crecimiento, pueden generar controversias en términos biológicos y estadísticos, pero son muy eficientes para describir la relación funcional N-Dg (Zeide, 2005). Además, la constante del modelo es una medida de la capacidad competitiva intraespecífica, llamada autotolerancia (Zeide, 1985). El modelo de Reineke se ha utilizado para generar la línea de densidad máxima en bosques puros

(as an econometric model), due to random and measurement error factors. The term u_i is asymmetric, represents the technical efficiency of the data and is distributed independent of the independent variables and the parameters of the equation. Therefore, to adjust the maximum density line with SFR, it is necessary to choose distributions with positive asymmetry for u_i , as in the case of the half-normal, normal-exponential, normal-truncated or gamma distribution (Kumbhakar & Lovell, 2003; Santiago-García et al., 2013; Zhang, Bi, Gove, & Heath, 2005). In the present study we used the half-normal distribution (H-N) with the property $u_i \sim iid N^+(0, \sigma_u^2)$, normal-exponential (N-E) with $u_i \sim iid E(\sigma_u^2)$ and the normal-truncated (N-T) with $u_i \sim iid N^+(0, \sigma_u^2)$ (Coelli, Rao, O'Donnell, & Battese, 2005; Kumbhakar & Lovell, 2003). For v_i , we consider the measures of variance $\lambda^2 = \sigma_u^2 / \sigma_v^2$ and $\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$ (Aigner et al., 1977; Bi et al., 2000; Coelli et al., 2005; Jondrow, Lovell, Materov, & Schmidt, 1982).

The stand density index (SDI) for the species mixture is defined as the number of trees per hectare at a mean square diameter of reference (25 cm for this case). This conception applies to stands with any degree of density, because the slope parameter ($\hat{\beta}_1$) is obtained for the maximum density or complete density (Zeide, 2005). The SDI represents an estimated empirical basis of maximum combination of the mean square diameter and the number of trees per hectare for a specific stand or type of forest (Long & Shaw, 2012), which may be one mixed-species forest. The SDI is estimated with the following expression:

$$SDI = N \left(\frac{25}{Dg} \right)^{\hat{\beta}_1}$$

On the other hand, to estimate the number of trees per hectare as a function of SDI, the following expression is used:

$$N = SDI \left(\frac{Dg}{25} \right)^{\hat{\beta}_1}$$

The SDI per species and the SDI for the mixture of species is estimated with the following expressions, respectively:

$$SDI_i = SDI PS_i$$

$$SDI = \sum_i^n \left[N \left(\frac{25}{Dg} \right)^{\hat{\beta}_1} PS_i \right]$$

where SDI_i is the SDI for the i -th species and PS_i is the proportion of the i -th specie (number of trees per hectare). The SDI_{\max} represents the sum of the SDI of species present.

(Cao et al., 2000) y mezclados (Torres-Rojo & Velázquez-Martínez, 2000). Para RFE, el modelo está dado por la expresión log-lineal, como la formulación de un modelo tipo Cobb-Douglas con dos términos de error (Aigner, Lovell, & Schmidt, 1977):

$$\ln(N) = \beta_0 + \beta_1 \ln(Dg) + u_i + v_i$$

donde u_i es el componente del error asimétrico y v_i es el componente del error simétrico con la propiedad $v_i \sim iid N(0, \sigma_v^2)$. El término v_i se distribuye independiente de y y representa la variación aleatoria en la producción (como un modelo econométrico), debido a factores de error aleatorios y de medición. El término u_i es asimétrico, representa la eficiencia técnica de los datos y se distribuye independiente de las variables regresoras y de los parámetros de la ecuación. Por tanto, para ajustar la línea de densidad máxima con RFE, es necesario elegir distribuciones con asimetría positiva para u_i , como el caso de la seminormal, normal-exponencial, normal-truncada o distribución Gamma (Kumbhakar & Lovell, 2003; Santiago-García et al., 2013; Zhang, Bi, Gove, & Heath, 2005). En el presente estudio se utilizó la distribución seminormal (N-H) con la propiedad $u_i \sim iid N^+(0, \sigma_u^2)$, normal-exponencial (N-E) con $u_i \sim iid E(\sigma_u^2)$ y la normal-truncada (N-T) con $u_i \sim iid N^+(0, \sigma_u^2)$ (Coelli, Rao, O'Donnell, & Battese, 2005; Kumbhakar & Lovell, 2003). Para v_i se consideraron las medidas de la varianza $\lambda^2 = \sigma_u^2 / \sigma_v^2$ y $\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$ (Aigner et al., 1977; Bi et al., 2000; Coelli et al., 2005; Jondrow, Lovell, Materov, & Schmidt, 1982).

El índice de densidad de rodal (IDR) para la mezcla de especies es definido como el número de árboles por hectárea a un diámetro medio cuadrático de referencia de 25 cm para este caso. Esta concepción aplica para rodales con cualquier grado de densidad, debido a que el parámetro de la pendiente ($\hat{\beta}_1$) es obtenido para la densidad máxima o densidad completa (Zeide, 2005). El IDR representa una base empírica estimada de la combinación máxima del diámetro medio cuadrático y el número de árboles por hectárea para un rodal o un tipo de bosque en particular (Long & Shaw, 2012), el cual puede ser uno mezclado. El IDR se calcula con la expresión siguiente:

$$IDR = N \left(\frac{25}{Dg} \right)^{\hat{\beta}_1}$$

Por otro parte, para estimar el número de árboles por hectárea como una función del IDR, se utiliza la expresión siguiente:

$$N = IDR \left(\frac{Dg}{25} \right)^{\hat{\beta}_1}$$

The average growth space (S , m^2) or available average area, for the mixture of species, was obtained with the expression $S = (10\ 000\ m^2/\bar{N})$. The average theoretical distance of space between trees (D , m), assuming S as the area determined by the crown of the trees, is obtained with $D = 89\% \sqrt{\frac{S}{\pi/4}}$. The tree crown deformation was considered as 89 % of the algebraic equation to obtain the diameter of the circle. This percentage was obtained iteratively to make compatible the number of trees per average growth space.

Model fitting

The adjustment of the model with OLS was performed in The MODEL Procedure of SAS/ETS® 9.3 with the Gauss-Newton optimization method; while the adjustment with SFR was made in The Q-LIM Procedure of SAS/ETS® 9.3 with the Quasi-Newton optimization method through maximum likelihood (Statistical Analysis System [SAS Institute Inc.], 2011). The SFR approach with superior statistical properties was selected through the following adjustment statistics: likelihood logarithm (LogLik), Akaike's information criterion (AIC), Schwarz's information criterion (SBC), total variance of the error component (σ) and variance ratio of the error components (λ).

Development of the density management diagram

The DMD was constructed with the equation obtained by SFR with N-T for the density-size relationship and using the maximum SDI (100 %) for mixed-species stands. DMD growth zones were defined according to the Langsaeter theory (Daniel, Helms, & Baker, 1979; Gilmore, O'Brien, & Hoganson, 2005; Langsaeter, 1941; Smith, Larson, Kelty, & Ashton, 1997). In this theory, the density management scenarios are defined, which implies maximizing the individual growth of residual trees (Santiago-García et al., 2013). The hypothesis establishes that the production of total volume in a stand, with specific age and composition, is constant and optimal for a range of point densities. The density may decrease, but not increase, with the modification of the forest inventory or point density (Gilmore et al., 2005; Langsaeter, 1941).

Due to the complexity of interspecific and intraspecific relationships of species, influence of species composition, stand characteristics and site factors, it is difficult to establish a general hypothesis for the definition of growth zones (del Río et al., 2015). In research on DMD for uneven-aged and mixed-species stands, Long and Shaw (2012) mention that the key to the design of the density management regime is the appropriate definition of the minimum and maximum limits of relative density. These researchers defined the upper limit at 60 % of the SDI_{max} (550) and the lower limit at 35 % of the SDI_{max} (220). According to

El IDR por especie y el IDR para la mezcla de especies se calculan con las expresiones siguientes, respectivamente:

$$IDR_i = IDR\ PS_i$$

$$IDR = \sum_i^n \left[N \left(\frac{25}{Dg} \right)^{\beta_i} PS_i \right]$$

donde IDR_i es el IDR para la i -ésima especie y PS_i es la proporción de la i -ésima especie (número de árboles por hectárea). El IDR_{max} representa la suma del IDR de las especies presentes.

El espacio de crecimiento promedio (S , m^2) o área promedio disponible, para la mezcla de especies, se obtuvo con la expresión $S = (10\ 000\ m^2/\bar{N})$. La distancia teórica promedio de espaciamiento entre árboles (D , m), asumiendo a S como el área determinada por la copa de los árboles, se obtiene con $D = 89\% \sqrt{\frac{S}{\pi/4}}$. La deformación de las copas de los árboles se consideró como 89 % de la ecuación algebraica, para obtener el diámetro del círculo. Este porcentaje se obtuvo iterativamente para hacer compatible el número de árboles por espacio de crecimiento promedio.

Ajuste del modelo

El ajuste del modelo con MCO se realizó en el procedimiento MODEL de SAS/ETS® 9.3 con el método de optimización Gauss-Newton; mientras que el ajuste con RFE se hizo en el procedimiento Q-LIM de SAS/ETS® 9.3 con el método de optimización Quasi-Newton a través de máxima verosimilitud (Statistical Analysis System [SAS Institute Inc.], 2011). El enfoque de RFE con propiedades estadísticas superiores se seleccionó a través de los estadísticos de ajuste siguientes: logaritmo de la verosimilitud (LogLik), criterio de información de Akaike (AIC), criterio de información de Schwarz (SBC), varianza total del componente del error (σ) y razón de varianzas de los componentes del error (λ).

Desarrollo del diagrama de manejo de la densidad

El DMD fue construido con la ecuación obtenida por RFE con N-T para la relación funcional densidad-tamaño y utilizando el IDR máximo (100 %) para rodales mezclados. Las zonas de crecimiento del DMD fueron definidas de acuerdo con la teoría de Langsaeter (Daniel, Helms, & Baker, 1979; Gilmore, O'Brien, & Hoganson, 2005; Langsaeter, 1941; Smith, Larson, Kelty, & Ashton, 1997). En esta teoría, los escenarios de manejo de la densidad son definidos, lo cual implica maximizar el crecimiento individual de los árboles residuales (Santiago-García et al., 2013). La hipótesis establece que la producción de volumen total en un rodal, con edad y composición específicas, es constante y óptima para un rango de densidades puntuales. La densidad puede

this information, in this study, the line of imminent mortality or self-thinning was defined at 70 % of the SDI_{max} and the lower limit at 35 % of the SDI_{max} .

Results and discussion

For the line of maximum density obtained with OLS, the intercept and slope were statistically different from zero ($P < 0.0001$) (Table 2). However, this adjustment characterizes a central tendency line considered inadequate to describe the upper limit of the density-size relationship, because it tends to overestimate mortality.

Table 3 shows the parameter estimates obtained by SFR for the approaches H-N, N-E and N-T, the components of

decrecer, pero no incrementar, con la modificación del inventario forestal o densidad puntual (Gilmore et al., 2005; Langsaeter, 1941).

Debido a la complejidad de las relaciones interespecíficas e intraespecíficas de las especies, influencia de la composición de especies, características del rodal y factores del sitio, es difícil establecer una hipótesis general para la definición de las zonas de crecimiento (del Río et al., 2015). En investigaciones sobre los DMD para rodales incoetáneos y mezclados, Long y Shaw (2012) mencionan que la clave en el diseño de régimen de manejo de la densidad es la definición apropiada de los límites mínimo y máximo de densidad relativa. Dichos investigadores definieron el límite superior al

Table 2. Parameter estimates of the Reineke's model with the ordinary least squares method for mixed-species forests.

Cuadro 2. Estimadores de los parámetros del modelo de Reineke con el método mínimo cuadrados ordinarios para bosques mezclados.

Parameter/ Parámetro	Estimates/ Estimador	SE/EE	t	Pr > t	LL/LI	UL/LS	MSE/ECM	RMSE/ RECM	R ² _{adj}
β_0	12.274	0.085	143.29	<0.0001	12.106	12.442			
β_1	-1.860	0.025	-73.06	<0.0001	-1.910	-1.810	0.102	0.319	0.75

SE = parameters standard error; t = value of the Student's t distribution; Pr > t = value of the probability associated with the Student's t distribution; LL and UL = lower and upper limits of the 95 % confidence interval, respectively; MSE = Mean square error; RMSE = Root-mean-square error; and R²_{adj} = Adjusted coefficient of determination.

EE = error estándar del parámetro; t = valor de la distribución t de Student; Pr > t = valor de la probabilidad asociado a la distribución t de Student; LI y LS = límites inferior y superior del intervalo al 95 % de confianza, respectivamente; ECM = error cuadrático medio; RECM = raíz del error cuadrático medio; y R²_{adj} = coeficiente de determinación ajustado.

Table 3. Parameter estimates of the Reineke's model with the stochastic frontier regression (SFR) method, under different approaches, for mixed-species forests.

Cuadro 3. Estimadores de los parámetros del modelo de Reineke con el método de regresión frontera estocástica (RFE), bajo diferentes enfoques, para bosques mezclados.

Approach/ Enfoque	Parameter/ Parámetro	Estimates/ Estimador	SE/EE	t	Pr > t	LogLik	AIC	SBC	σ	λ
H-N/N-H	β_0	12.4021	0.0911	136.08	<0.0001					
	β_1	-1.7953	0.0273	-65.79	<0.0001					
	σ_v	0.1753	0.0097	18.04	<0.0001	-424	856	877	0.472	2.494
	σ_u	0.4376	0.0159	27.51	<0.0001					
N-E	β_0	12.1756	0.0884	137.71	<0.0001					
	β_1	-1.7639	0.0268	-65.71	<0.0001					
	σ_v	0.2217	0.0084	26.27	<0.0001	-411	830	851	0.316	1.019
	σ_u	0.2258	0.0131	17.20	<0.0001					
N-T	β_0	12.3534	0.1418	87.08	<0.0001					
	β_1	-1.6602	0.0602	-27.53	<0.0001					
	σ_v	0.3811	0.0543	7.02	<0.0001	-958	1925	1953	0.484	0.782
	σ_u	0.2982	0.0304	9.80	<0.0001					
	μ	0.4688	0.0372	12.59	<0.0001					

H-N, N-E and N-T = approaches of SFR half-normal, normal-exponential and normal-truncated, respectively; SE = parameters standard error; t = value of the Student's t distribution; Pr > t = value of the probability associated with the Student's; LogLik = likelihood logarithm; AIC = Akaike information criterion; SBC = Schwarz information criterion; σ = total variance of the error; λ = reason for the variances of the error components.

N-H, N-E y N-T = enfoques de RFE seminormal, normal-exponencial y normal-truncada, respectivamente; EE = error estándar del parámetro; t = valor de la distribución t de Student; Pr > t = valor de la probabilidad asociado a la distribución t de Student; LogLik = logaritmo de la verosimilitud; AIC = criterio de información de Akaike; SBC = criterio de información de Schwarz; σ = varianza total del error; λ = razón de las varianzas de los componentes del error.

the error variance of the stochastic production function and the statistical adjustment. The approach N-E was comparatively better than H-N and N-T, because it had the highest likelihood logarithm ($\text{LogLik} = -411$) and the lowest values of the Akaike's information criterion ($\text{AIC} = 830$), Schwarz's information criterion ($\text{SBC} = 851$) and error variance ($\sigma = 0.316$); however, H-N and N-T were better adjusted to the upper boundary line of the experimental data (Figure 2).

The 95 % confidence interval for the slope parameter, adjusted by SFR with N-T (-1.541 to -1.778), was wider compared to that adjusted by OLS (-1.810 to -1.910), SFR with H-N (-1.714 to -1.910) and SFR with N-E (-1.711 to -1.816). However, SFR with N-T adjusted the maximum density line to the upper limit of the data from the mixed stand plots. The 95 % confidence interval of the intercept parameter overlaps between the methods used; OLS (12.106 to 12.442), SFR with H-N (12.223 to 12.580), SFR with N-E (12.002 to 12.349) and SFR with N-T (12.075 to 12.631). The extreme values of the intercept for the mixture of species are contained in the lower limit of SFR with N-E and the upper limit of SFR with N-T.

The maximum density line created by SFR with the approach N-T showed better fit to the upper limit of the maximum density of the mixed stand data. Although it does not have the greatest adjustment (in this case the adjustment should not be a problem for the detection of the appropriate density threshold), this line was used to generate the DMD shown in Figure 2.

60 % del IDR_{max} (550) y el límite inferior al 35 % del IDR_{max} (220). De acuerdo con dicha información, en este estudio, la línea de mortalidad inminente o autoaclareo se definió al 70 % del IDR_{max} y el límite inferior al 35 % del IDR_{max} .

Resultados y discusión

Para la línea de densidad máxima obtenida con MCO, el intercepto y la pendiente fueron estadísticamente diferentes de cero ($P < 0.0001$) (Cuadro 2). Sin embargo, este ajuste caracteriza una línea de tendencia central considerada inadecuada para describir el límite superior de la relación densidad-tamaño, debido a que tiende a sobrestimar la mortalidad.

El Cuadro 3 presenta los estimadores de los parámetros obtenidos por RFE para los enfoques N-H, N-E y N-T, los componentes de la varianza del error de la función estocástica de producción y el ajuste estadístico. El enfoque N-E fue comparativamente mejor que N-H y N-T, ya que mostró el mayor logaritmo de la verosimilitud ($\text{LogLik} = -411$) y los valores más bajos del criterio de información de Akaike ($\text{AIC} = 830$), criterio de información de Schwarz ($\text{SBC} = 851$) y varianza del error ($\sigma = 0.316$); sin embargo, N-H y N-T se ajustaron mejor a la línea de la frontera superior de los datos experimentales (Figura 2).

El intervalo de confianza al 95 % para el parámetro de la pendiente, ajustado por RFE con N-T (-1.541 a -1.778), fue más amplio comparado con el ajustado por MCO (-1.810 a -1.910), RFE con N-H (-1.714 a -1.910) y RFE con N-E (-1.711

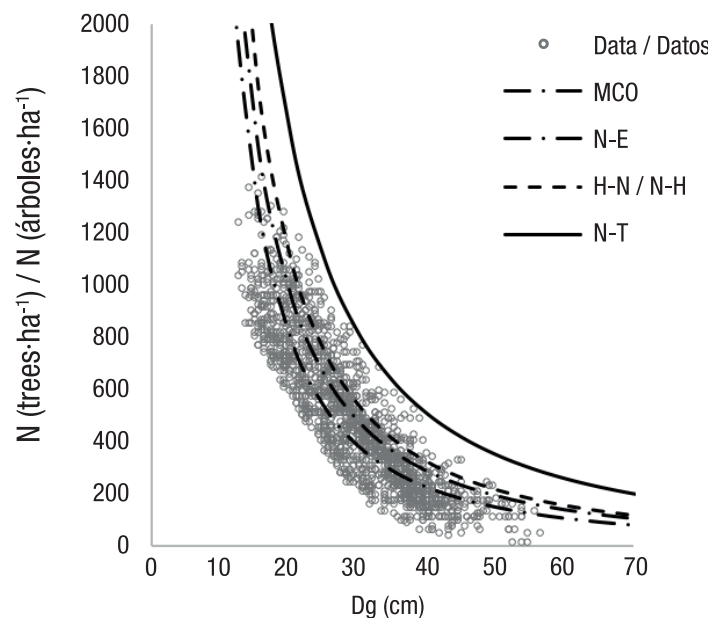


Figure 2. Maximum density lines for mixed-species stands, adjusted with ordinary least squares and stochastic frontier regression (SFR). The approaches of SFR are represented by H-N (half-normal), N-E (normal-exponential) and N-T (normal-truncated).

Figura 2. Líneas de densidad máxima para rodales mezclados, ajustadas con mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y regresión frontera estocástica (RFE). Los enfoques de RFE están representados por N-H (seminormal), N-E (normal-exponencial) y N-T (normal-truncada).

Density management diagram and thinning program

The DMD based on the adjustment of SFR as a N-T model is shown in Figure 3. The maximum density line represents the SDI_{max} (1 107) at an mean square diameter of 25 cm; the line of imminent mortality or self-thinning was represented at 70 % of SDI_{max} (775); the lower line of the constant growth area was defined at 35 % of the SDI_{max} (387); and the free growth line at 20 % of the SDI_{max} (221). These four lines defined the DMD growth zones: 1) free growth ($20 \% < SDI_{max} \leq 35 \%$), 2) constant growth ($35 \% < SDI_{max} \leq 70 \%$), 3) mortality ($70 \% < SDI_{max} \leq 100 \%$).

The DMD includes different isolines with defined proportions within each growth zone, as well as the effect of a thinning program for a mixed-species stand of the dataset. The thinning program is based on the

a -1.816). No obstante, RFE con N-T ajustó la línea de densidad máxima a la frontera superior de los datos de las parcelas de rodales mezclados. El intervalo de confianza al 95 % del parámetro del intercepto se traslapa entre los métodos utilizados; MCO (12.106 a 12.442), RFE con N-H (12.223 a 12.580), RFE con N-E (12.002 a 12.349) y RFE con N-T (12.075 a 12.631). Los valores extremos del intercepto para la mezcla de especies están contenidos en el límite inferior de RFE con N-E y el superior de RFE con N-T.

La línea de densidad máxima generada vía RFE con el enfoque N-T mostró mejor ajuste al límite superior de la densidad máxima de los datos de rodales mezclados. A pesar de que no posee el mayor ajuste (en este caso el ajuste no debería ser un problema para la detección del umbral adecuado de densidad), esta línea se utilizó para generar el DMD presentado en la Figura 2.

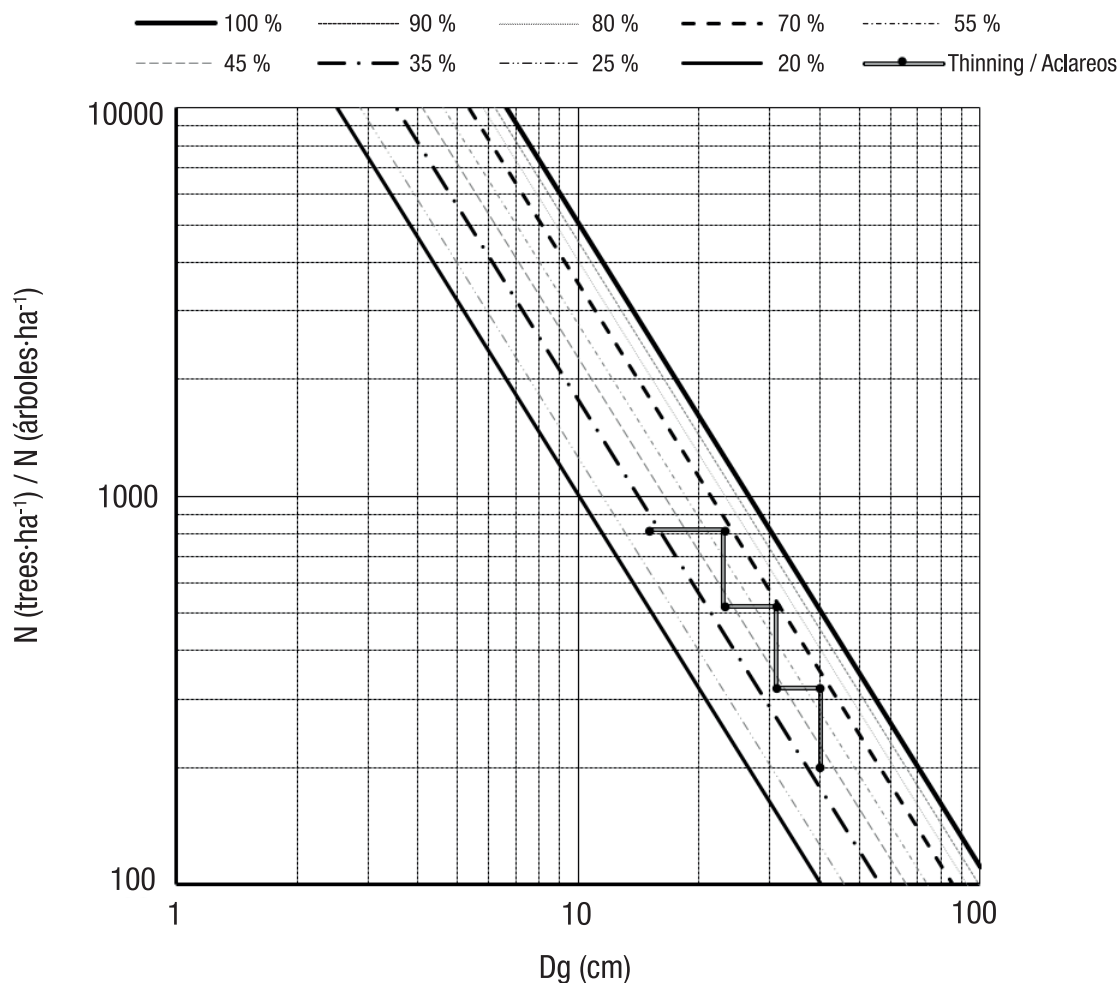


Figure 3. Density management diagram created by adjusting stochastic frontier regression (SFR) with normal-truncated approach (N-T) and thinning program for mixed-species stands.

Figura 3. Diagrama de manejo de la densidad construido mediante el ajuste de regresión frontera estocástica (RFE) con el enfoque normal-truncado (N-T); y programa de aclareos para rodales mezclados.

initial condition of $N = 820$ trees·ha⁻¹, $D_g = 15$ cm, $G = 14.5$ m²·ha⁻¹ and $SDI = 352$. This stand contains the following species with their respective proportions and SDI : *P. durangensis* (47 %, 165), *P. arizonica* (22 %, 78), *P. teocote* (19 %, 67) and *Q. sideroxylla* (12 %, 42).

Thinning was programmed exclusively within the zone of constant growth (zone III), in which production is dense-independent and growth is maximized for residual trees. The first thinning is applied when the stand reaches the condition close to the line of imminent mortality with $G = 31$ m²·ha⁻¹, $D_g = 23$ cm and $SDI = 714$. The conditions after thinning are $N = 520$ trees·ha⁻¹, $SDI = 453$, $D_g = 23$ cm (a systematic thinning is applied and D_g should remain constant) and $G = 12.5$ m²·ha⁻¹. Two thinning was carried out before reaching the final harvest. In the previous condition, the conditions are $N = 200$ trees·ha⁻¹, $D_g = 40$ cm, $G = 25.13$ m²·ha⁻¹ and $SDI = 436$; and in the final harvest, $G = 36.13$ m²·ha⁻¹, $D_g = 48$ cm and $SDI = 591$ with the initial species proportion. The thinning program is applied in accordance with the 15-year cutting cycle and a 90-year forest rotation. The planning of the program depends on the objectives, either to maintain the species mixture or only one of these for the final

Diagrama de manejo de la densidad y programa de aclareos

El DMD basado en el ajuste de RFE como un modelo N-T se muestra en la Figura 3. La línea de densidad máxima representa el IDR_{max} (1 107) a un diámetro cuadrático promedio de 25 cm; la línea de mortalidad inminente o autoaclareo fue representada al 70 % del IDR_{max} (775); la línea inferior de la zona de crecimiento constante fue definida al 35 % del IDR_{max} (387); y la línea de crecimiento libre al 20 % del IDR_{max} (221). Estas cuatro líneas definieron las zonas de crecimiento del DMD: 1) crecimiento libre (20 % < $IDR_{max} \leq 35$ %), 2) crecimiento constante (35 % < $IDR_{max} \leq 70$ %), 3) mortalidad (70 % < $IDR_{max} \leq 100$ %).

El DMD incluye isolíneas diferentes con proporciones definidas dentro de cada zona de crecimiento, así como el efecto de un programa de aclareos para un rodal mezclado de la base de datos. El programa de aclareos se basa en la condición inicial de $N = 820$ árboles·ha⁻¹, $D_g = 15$ cm, $G = 14.5$ m²·ha⁻¹ e $IDR = 352$. Este rodal contiene las siguientes especies con sus respectivas proporciones e IDR : *P. durangensis* (47 %, 165), *P. arizonica* (22 %, 78), *P. teocote* (19 %, 67) y *Q. sideroxylla* (12 %, 42).

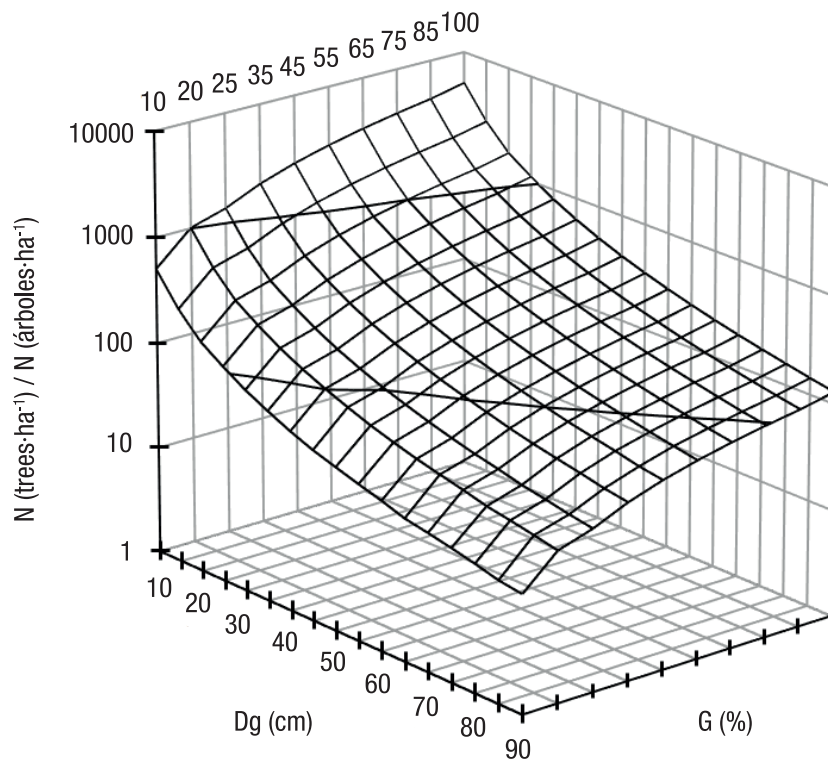


Figura 4. Maximum density lines for mixed-species stands of Durango, Mexico. Number of trees per hectare (N) against the mean square diameter (D_g) for the percentages of the basal area (G).

Figura 4. Líneas de densidad máxima para rodales mezclados de Durango, México. Número de árboles por hectárea (N) contra el diámetro cuadrático promedio (D_g) para los porcentajes de área basal (G).

harvest or to regularize the structure for the next forest rotation.

Figure 4 shows the graph of maximum density line (SDI_{max} or 100 %) in three dimensions. The graph presents the number of trees per hectare (N) with respect to the mean square diameter (Dg) and the percentage of the basal area (G). For each combination of N and Dg, the percentages of the basal area belong to the same SDI. In the line of the reference square diameter (Dg = 25 cm), the standardized basal area is shown for each SDI. These SDI coincide directly with the SDI of 1 107 (100 %), 996 (90 %), 886 (80 %), 775 (70 %), 609 (55 %), 498 (45 %), 387 (35 %), 227 (25 %) and 221 (20 %), according to the DMD isolines (Figure 3).

An average growth space diagram (AGSD) was created with the maximum density lines and growth zones corresponding to the DMD. The diagram represents the average growth space (S, m²) and the Dg (m) for the development of mixed stand trees (Pretzsch & Biber, 2005) in the growth zones (Figure 5). The combination of Dg and N corresponds to S in each line (Figure 3). In the line of maximum density (100 % of the SDI), for Dg = 20 cm and N = 1 603 trees·ha⁻¹ there are S = 6.24 m²

Los aclareos se programaron exclusivamente dentro de la zona de crecimiento constante (zona III), en la cual la producción es denso-independiente y el crecimiento es maximizado para los árboles residuales. El primer aclareo se aplica cuando el rodal llega a la condición cercana a la línea de mortalidad inminente con $G = 31 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$, $Dg = 23 \text{ cm}$ e $IDR = 714$. Las condiciones después del aclareo son $N = 520 \text{ árboles} \cdot \text{ha}^{-1}$, $IDR = 453$, $Dg = 23 \text{ cm}$ (un aclareo sistemático es aplicado y el Dg debería permanecer constante) y $G = 12.5 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$. Dos aclareos más son aplicados antes de llegar a la cosecha final. En la condición previa, las condiciones son $N = 200 \text{ árboles} \cdot \text{ha}^{-1}$, $Dg = 40 \text{ cm}$, $G = 25.13 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$ e $IDR = 436$; y en la cosecha final, $G = 36.13 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$, $Dg = 48 \text{ cm}$ e $IDR = 591$ con la proporción de especies inicial. El programa de aclareos se aplica de acuerdo con el ciclo de corta de 15 años y un turno técnico de 90 años. La planeación del programa depende de los objetivos, ya sean mantener la mezcla de especies o solo una de estas para la cosecha final o regularizar la estructura para el turno siguiente.

La Figura 4 presenta la gráfica de la línea de densidad máxima (IDR_{max} o 100 %) en tres dimensiones. La gráfica presenta el número de árboles por hectárea

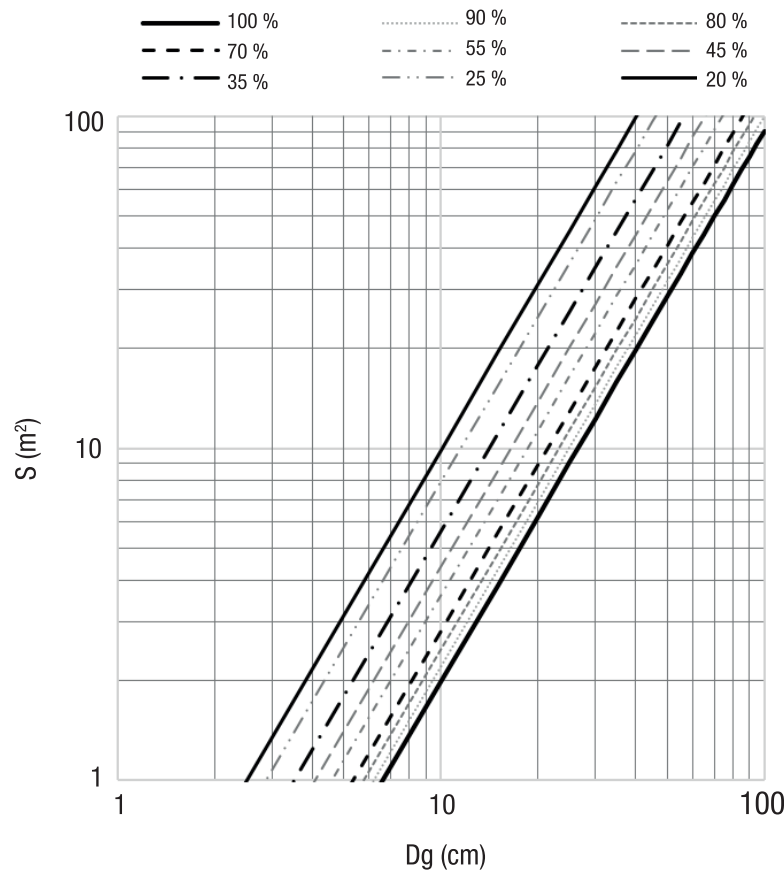


Figure 5. Average growth space diagram (S) against the mean square diameter (Dg) for mixed-species forests of Durango, Mexico.

Figura 5. Diagrama de espacio de crecimiento promedio (S) contra el diámetro cuadrático promedio (Dg) para bosques mezclados de Durango, México.

and $D = 2.49$ m; in the line of imminent mortality (70 % of the SDI), for $D_g = 20$ cm and $N = 1\,042$ trees·ha⁻¹ there are $S = 9.60$ m² and $D = 3.098$ m.

The estimated value of the slope parameter (-1.86), obtained by OLS (Table 2), was more pronounced than the theoretical value of Reineke (-1.605), which is outside the 95 % confidence interval generated by OLS. This reinforces the argument that, for this case, the value of the slope is specific and varies with the species (Burkhart, 2013; Reineke, 1933), the characteristics of each region (Comeau et al., 2010) and the habits of growth of mixed-species stands. In addition, the OLS intercept confidence interval considers the value of the estimates obtained with SFR, and the value of the slope of SFR with N-T is statistically different from that of OLS adjusted at a confidence level of 95 %. The N-T approach, in the 95% confidence interval (-1.541 to 1.778), contains the theoretical value of -1.605 found by Reineke (1933). On the other hand, the line of maximum density is objectively adjusted (Bi et al., 2000) and the value of the slope is less pronounced than with OLS, due to the mixture of species and the adjustment procedure used (Sterba & Monserud, 1993).

In addition to the above, SFR provides a direct and efficient estimate of the upper limit of self-thinning (Santiago-García et al., 2013). Therefore, the adjustment with OLS is sensitive to the selection of data and can generate maximum density lines with inappropriate slopes (Reyes-Hernandez et al., 2013), because there is an intrinsic problem of subjectivity in the data selection of maximum density (Chen, Kang, Bai, Fang, & Wang, 2008). In contrast, SFR with N-T has the ability to fit the maximum density line at the upper limit of the dataset (Zhang et al., 2005), which implies that the line generated for mixed-species stands studied is consistent both statistically as biologically.

The maximum density line, obtained for the stands mixed with the SFR method and N-T approach, is above the upper limit of the density-size ratio from the dataset used. This result contrasts with that indicated by Zhang et al. (2005) in the sense that SFR adjusts the maximum density line below the upper limit of the experimental data; however, it coincides with that found by Santiago-García et al. (2013), who used the N-T procedure for *P. patula* in Hidalgo, Mexico. The graph behavior in log-linear scale (log-log) suggests the possibility of using a segmented model to characterize the dynamics of stands and episodes of mortality, as suggested by Cao and Dean (2008), who used a three-segment model for *Pinus taeda* L. and *P. elliottii*. The first segment characterizes the condition of the forest before mortality and the other two characterize mortality rates.

The zones defined in the DMD are compatible with the production zones of the Langsaeter theory (Langsaeter,

(N) con respecto al diámetro cuadrático medio (D_g) y el porcentaje de área basal (G). Para cada combinación de N y D_g , la zona del área basal pertenece al mismo IDR. En la línea del diámetro cuadrático de referencia ($D_g = 25$ cm), el área basal estandarizada se muestra para cada IDR. Estos IDR coinciden directamente con el IDR de 1 107 (100 %), 996 (90 %), 886 (80 %), 775 (70 %), 609 (55 %), 498 (45 %), 387 (35 %), 227 (25 %) y 221 (20 %), de acuerdo con las isóneas del DMD (Figura 3).

Un diagrama de espacio de crecimiento promedio (DECP) se construyó con las líneas de densidad máxima y las zonas de crecimiento correspondientes al DMD. El diagrama representa el espacio de crecimiento promedio (S , m²) y el D_g (m) para el desarrollo de los árboles de rodales mezclados (Pretzsch & Biber, 2005) en las zonas de crecimiento (Figura 5). La combinación de D_g y N corresponden a S en cada línea (Figura 3). En la línea de densidad máxima (100 % del IDR), para $D_g = 20$ cm y $N = 1\,603$ árboles·ha⁻¹ existen $S = 6.24$ m² y $D = 2.49$ m; en la línea de mortalidad inminente (70 % del IDR), para $D_g = 20$ cm y $N = 1\,042$ árboles·ha⁻¹ existen $S = 9.60$ m² y $D = 3.098$ m.

El valor estimado del parámetro de la pendiente (-1.86), obtenido por MCO (Cuadro 2), fue más pronunciado que el valor teórico de Reineke (-1.605), el cual está afuera del intervalo de confianza al 95 % generado por MCO. Esto refuerza el argumento de que, para este caso, el valor de la pendiente es específico y varía con la especie (Burkhart, 2013; Reineke, 1933), las características de cada región (Comeau et al., 2010) y los hábitos de crecimiento de rodales mezclados. Además, el intervalo de confianza del intercepto de MCO considera el valor de los estimadores obtenidos con RFE, y el valor de la pendiente de RFE con N-T es estadísticamente diferente que el de ajustado por MCO a un nivel de confianza del 95 %. El enfoque N-T, en el intervalo de confianza al 95 % (-1.541 a 1.778), contiene el valor teórico de -1.605 encontrado por Reineke (1933). Por otra parte, la línea de densidad máxima se ajusta objetivamente (Bi et al., 2000) y el valor de la pendiente es menos pronunciado que con MCO, debido a la mezcla de especies y el procedimiento de ajuste utilizado (Sterba & Monserud, 1993).

En adición a lo anterior, RFE provee una estimación directa y eficiente del límite superior del autoclareo (Santiago-García et al., 2013). Por consiguiente, el ajuste con MCO es sensible a la selección de datos y puede generar líneas de densidad máxima con pendientes inapropiadas (Reyes-Hernandez et al., 2013), debido a que existe un problema intrínseco de subjetividad en la selección de los datos de densidad máxima (Chen, Kang, Bai, Fang, & Wang, 2008). En contraste, RFE con N-T tiene la capacidad de ajustar la línea de densidad máxima en el límite superior de la base de datos (Zhang et al., 2005), lo cual implica que la línea generada para los rodales mezclados estudiados es consistente tanto estadística como biológicamente.

1941). Although there are differences between pure and even-aged forests and mixed and uneven-aged forests, in this study, the increase in the basal area was used to define the line of imminent mortality or self-thinning to 70 % of SDI_{max} . The growth areas were delimited by the SDI: 1) in zone I ($SDI_{max} \leq 20$ %), the growth per unit area was proportional to the density (before crown closure) and the average basal area was $12.98 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$; 2) in zone II ($20 \% < SDI_{max} \leq 35$ %), the growth per unit area was proportional to the density, but the individual growth starts the decline, in this case, the average basal area was $27.21 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$; 3) in zone III ($35 \% < SDI_{max} \leq 70$ %), the growth per unit area is not proportional to the density, only the distribution, with an average basal area of $45.45 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$ and 4) in the zone IV ($70 \% < SDI_{max} \leq 100$ %), the growth per unit area is invariant of density; however, when it increases, net production decreases (Gilmore et al., 2005; Newton, 1997). For the generated DMD, the average basal area for the SDI_{max} line was $64.93 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$.

The prescription of thinning was programmed in the constant growth zone, in which the constant optimum density is given before crown closure (before self-thinning occurs) and can be assumed to maximize timber production and other forestry management objectives (Zeide, 2004). The lines of the DMD (Figure 3) have been defined for self-thinning between 55 and 66 % of the SDI_{max} , the line of constant growth zone between 30 and 35 %, and the line of free growth between 13 and 20 % of the SDI_{max} . These criteria have been used in studies for *P. menziessii* (Drew & Flewelling, 1979), *Alnus rubra* Bong (Hibbs, 1987), *Abies balsamea* (L.) Mill. (McCarthy & Weetman, 2007), *Pinus densiflora* Siebold & Zucc., even aged stands of coniferous mixture (Newton, 1997) and *P. patula* (Santiago-García et al., 2013).

The optimal average growth space, in which the maximum potential of a site is used, is defined in the constant growth zone (35 to 70 % of the SDI), even though the density is affected by the variables used to measure the density (basal area, volume, mean square diameter or relative density) and the interpretations of such measures (Zeide, 2004). The properties in relation to these density approaches in a stand are associated with the ecological processes of growth and populations (Long & Vacchiano, 2013).

Conclusions

The maximum density line for mixed-species forests of Durango, Mexico, was created with a stochastic frontier regression approach, as a normal-truncated model. The density management diagram can be applied to prescribe thinning, regarding the development of mixed forest species in constant growth zone (zone

La línea de densidad máxima, obtenida para los rodales mezclados con el método RFE y enfoque N-T, está arriba del límite superior de la relación densidad-tamaño de la base de datos utilizada. Este resultado contrasta con lo indicado por Zhang et al. (2005) en el sentido que RFE ajusta la línea de densidad máxima por debajo del límite superior de los datos experimentales; sin embargo, coincide con lo encontrado por Santiago-García et al. (2013), quienes usaron el procedimiento N-T para *P. patula* en Hidalgo, México. El comportamiento de la gráfica de los datos en escala log-lineal (log-log) sugiere la posibilidad de usar un modelo segmentado para caracterizar los estados de la dinámica de rodales y episodios de mortalidad, tal como lo hicieron Cao y Dean (2008), quienes emplearon un modelo de tres segmentos para *Pinus taeda* L. y *P. elliottii*. El primer segmento caracteriza el estado del bosque antes de la mortalidad y los otros dos caracterizan las tasas de mortalidad.

Las zonas definidas en el DMD son compatibles con las zonas de producción de la teoría de Langsaeter (Langsaeter, 1941). Aunque existen diferencias entre los bosques puros y coetáneos y los bosques mezclados e incoetáneos, en este estudio, el incremento en el área basal se utilizó para definir la línea de mortalidad inminente o autoaclareo al 70 % de IDR_{max} . Las zonas de crecimiento fueron delimitadas por el IDR: 1) en la zona I ($IDR_{max} \leq 20$ %), el crecimiento por unidad de área fue proporcional a la densidad (antes del cierre de copas) y el área basal promedio fue de $12.98 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$; 2) en la zona II ($20 \% < IDR_{max} \leq 35$ %), el crecimiento por unidad de área fue proporcional a la densidad, pero el crecimiento individual inicia el decline, en este caso, el área basal promedio fue de $27.21 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$; 3) en la zona III ($35 \% < IDR_{max} \leq 70$ %), el crecimiento por unidad de área no es proporcional a la densidad, solo la distribución, con un área basal promedio de $45.45 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$ y 4) en la zona IV ($70 \% < IDR_{max} \leq 100$ %), el crecimiento por unidad de área es invariante de la densidad; sin embargo, cuando esta incrementa, la producción neta disminuye (Gilmore et al., 2005; Newton, 1997). Para el DMD generado, el área basal promedio para la línea del IDR_{max} fue de $64.93 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$.

La prescripción de los aclareos fue programada en la zona de crecimiento constante, en la cual se da la densidad óptima constante antes del cierre de copas (antes de que suceda el autoaclareo) y puede ser asumida para maximizar la producción maderable y otros objetivos de manejo forestal (Zeide, 2004). Las líneas de los DMD (Figura 3) han sido definidas para el autoaclareo entre 55 y 66 % del IDR_{max} , la línea de la zona de crecimiento constante entre 30 y 35 %, y la línea del crecimiento libre entre 13 y 20 % del IDR_{max} . Estos criterios han sido usados en estudios para *P. menziessii* (Drew & Flewelling, 1979), *Alnus rubra* Bong (Hibbs, 1987), *Abies balsamea* (L.) Mill. (McCarthy & Weetman, 2007), *Pinus densiflora*

III of the Langsaeter theory). In this zone, the optimal utilization of the site resources is guaranteed, and the thinning programs can be applied between $22.71 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$ and $45.45 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$ of average basal area, delimited by 35 to 70 % of the maximum stand density index (SDI_{max}). This includes many combinations of trees per hectare and mean square diameter for the objectives of forest management and reconversion of species, as well as for the ecological and conservation of species diversity in mixed-species forests, which can be regulated during forest rotation. The implementation of the methodology to dispersal the general SDI of the species present in a stand, suggests that thinning can be programmed according to the global SDI. They can also be programmed per species to regulate their composition, through silvicultural treatments and the average growth space for mixed-species forests studied with timber production objectives.

Acknowledgments

This study was funded by the Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias (INIFAP) with the project called “Generación de diagramas de manejo de la densidad bajo modelación de regresión frontera estocástica para auxiliar el manejo forestal sustentable en los estados de Chihuahua, Durango y Puebla (13522232551)”. The authors thank the providers of forestry technical services: José Antonio Virrey Rodríguez, Sacramento Corrales Rivas and Fernando Salazar Jiménez, for the facilities for the use of the inventory data of mixed stands of the UMAFOR 1005 “Santiago Papasquiario y Anexos”.

End of English version

References / Referencias

- Aigner, D., Lovell, C. K., & Schmidt, P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, 6(1), 21–37. doi: 10.1016/0304-4076(77)90052-5
- Bi, H., Wan, G., & Turvey, N. D. (2000). Estimating the self-thinning boundary line as a density-dependent stochastic biomass frontier. *Ecology*, 81(6), 1477–1483. doi: 10.1890/0012-9658(2000)081[1477:etstbl]2.0.co;2
- Burkhardt, H. E. (2013). Comparison of maximum size–density relationships based on alternate stand attributes for predicting tree numbers and stand growth. *Forest Ecology and Management*, 289, 404–408. doi: 10.1016/j.foreco.2012.10.041
- Cao, Q. V., & Dean, T. J. (2008). Using segmented regression to model the density–size relationship in direct-seeded slash pine stands. *Forest Ecology and Management*, 255(3–4), 948–952. doi: 10.1016/j.foreco.2007.10.004
- Cao, Q. V., Dean, T. J., & Baldwin, V. C. (2000). Modeling the size–density relationship in direct-seeded

Siebold & Zucc., rodales coetáneos de mezcla de coníferas (Newton, 1997) y *P. patula* (Santiago-García et al., 2013).

El espacio de crecimiento promedio óptimo, en el cual se utiliza el potencial máximo de un sitio, se define en la zona de crecimiento constante (35 a 70 % del IDR), a pesar de que la densidad es afectada por las variables usadas para medir la densidad (área basal, volumen, diámetro cuadrático promedio o densidad relativa) y por las interpretaciones de dichas medidas (Zeide, 2004). Las propiedades en relación con estos enfoques de densidad en un rodal están asociadas con los procesos ecológicos de crecimiento y de poblaciones (Long & Vacchiano, 2013).

Conclusiones

La línea de densidad máxima para bosques mezclados de Durango, México, fue generada objetivamente con regresión frontera estocástica, como un modelo normal-truncado. El diagrama de manejo de la densidad puede ser aplicado para prescribir aclareos, considerando el desarrollo de las especies de los bosques mezclados en la zona de crecimiento constante (zona III de la teoría de Langsaeter). En esta zona, la utilización óptima de los recursos del sitio es garantizada y los programas de aclareo pueden ser aplicados entre $22.71 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$ y $45.45 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$ de área basal promedio, delimitada por el 35 a 70 % del índice de densidad de rodal máximo (IDR_{max}). Esto incluye muchas combinaciones de árboles por hectárea y diámetro cuadrático promedio para los objetivos de manejo forestal y reconversión de especies, así como para los ecológicos y de conservación de la diversidad de especies en bosques mezclados, la cual puede ser regulada durante el turno de corta. La implementación de la metodología, para disgregar el IDR general de las especies presentes en un rodal, sugiere que los aclareos pueden programarse en función del IDR global. También pueden programarse por especies para regular su composición, a través de tratamientos silvícolas y del espacio de crecimiento promedio para los bosques mezclados estudiados con objetivos de producción maderable.

Agradecimientos

El presente trabajo fue financiado por el Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias (INIFAP) con el proyecto denominado “Generación de diagramas de manejo de la densidad bajo modelación de regresión frontera estocástica para auxiliar el manejo forestal sustentable en los estados de Chihuahua, Durango y Puebla (13522232551)”. Los autores agradecen a los prestadores de servicios técnicos forestales: José Antonio Virrey Rodríguez, Sacramento Corral Rivas y Fernando Salazar Jiménez, por las facilidades para el uso de los datos de inventario de rodales mezclados de la UMAFOR 1005 “Santiago Papasquiario y Anexos”.

Fin de la versión en español

- slash pine stands. *Forest Science*, 46(3), 317–321. Retrieved from <https://pdfs.semanticscholar.org/879c/bf449903b84b34cce8898c4b171beb562d94.pdf>
- Chen, K., Kang, H. M., Bai, J., Fang, X. W., & Wang, G. (2008). Relationship between the virtual dynamic thinning line and the self-thinning boundary line in simulated plant populations. *Journal of Integrative Plant Biology*, 50(3), 280–290. doi: 10.1111/j.1744-7909.2007.00618.x
- Chisman, H., & Schumacher, F. (1940). On the tree-area ratio and certain of its applications. *Journal of Forestry*, 38(4), 311–317.
- Coelli, T. J., Rao, D. S. P., O'Donnell, C. J., & Battese, G. E. (2005). *An introduction to efficiency and productivity analysis*. New York, USA: Springer Science & Business Media.
- Comeau, P. G., White, M., Kerr, G., & Hale, S. E. (2010). Maximum density-size relationships for Sitka spruce and coastal Douglas-fir in Britain and Canada. *Forestry*, 83(5), 461–468. doi: 10.1093/forestry/cpq028
- Curtis, R. O. (1970). Stand density measures: An interpretation. *Forest Science*, 16(4), 403–414.
- Daniel, T. W., Helms, J. A., & Baker, F. S. (1979). *Principles of silviculture*. New York, NY, USA: McGraw-Hill Book Company.
- del Río, M., Pretzsch, H., Alberdi, I., Bielak, K., Bravo, F., Brunner, A., ...Bravo-Oviedo, A. (2015). Characterization of the structure, dynamics, and productivity of mixed-species stands: review and perspectives. *European Journal of Forest Research*, 135(1), 23–49. doi: 10.1007/s10342-015-0927-6
- Drew, T. J., & Flewelling, J. W. (1979). Stand density management: an alternative approach and its application to Douglas-fir plantations. *Forest Science*, 25(3), 518–532.
- García, E. M. (1981). *Modificaciones al sistema de clasificación climática de Köppen*. México: UNAM.
- García, O. (2012). Self-thinning limits in two and three dimensions. *Mathematical and Computational Forestry & Natural-Resource Sciences (MCFNS)*, 4(2), 66–72. Retrieved from http://mcfns.net/index.php/Journal/article/view/144/MCNFS-4.2_66
- Gilmore, D. W., O'Brien, T. C., & Hoganson, H. M. (2005). Thinning red pine plantations and the Langsaeter hypothesis: a northern Minnesota case study. *Northern Journal of Applied Forestry*, 22(1), 19–26. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/233515610_Thinning_Red_Pine_Plantations_and_the_Langsaeter_Hypothesis_A_Northern_Minnesota_Case_Study
- Hibbs, D. E. (1987). The self-thinning rule and red alder management. *Forest Ecology and Management*, 18(4), 273–281. doi: 10.1016/0378-1127(87)90131-9
- Jondrow, J., Lovell, C. A. K., Materov, I. S., & Schmidt, P. (1982). On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model. *Journal of Econometrics*, 19(2-3), 233–238. doi: 10.1016/0304-4076(82)90004-5
- Krajicek, J. E., Brinkman, K. A., & Gingrich, S. F. (1961). Crown competition. A measure of density. *Forest Science*, 7(1), 35–42. Retrieved from <http://cmapspublic3.ihmc.us/rid=1N4TSFQX6-GWW4BN-14PZ/Crown%20competition%20-%20A%20measure%20of%20density.pdf>
- Kumbhakar, S. C., & Lovell, C. K. (2003). *Stochastic frontier analysis*. New York, USA: Cambridge University Press.
- Langsaeter, A. (1941). Om tynning i enaldret gran-og furuskog. *Meddelelser fra Det norske Skogforsøksvesen*, 8, 131–216. Retrieved from http://www.skogoglandskap.no/filearchive/medd_dns_8_om_tynning_i_enaldret_gran_og_furuskog.pdf
- Long, J. N., & Shaw, J. D. (2005). A density management diagram for even-aged ponderosa pine stands. *Western Journal of Applied Forestry*, 20(4), 205–215.
- Long, J. N., & Shaw, J. D. (2012). A density management diagram for even-aged Sierra Nevada mixed-conifer stands. *Western Journal of Applied Forestry*, 27(4), 187–195. doi: 10.5849/wjaf.11-036
- Long, J. N., & Vacchiano, G. (2013). A comprehensive framework of forest stand property–density relationships: perspectives for plant population ecology and forest management. *Annals of Forest Science*, 71(3), 325–335. doi: 10.1007/s13595-013-0351-3
- McCarthy, J. W., & Weetman, G. (2007). Self-thinning dynamics in a balsam fir (*Abies balsamea* (L.) Mill.) insect-mediated boreal forest chronosequence. *Forest Ecology and Management*, 241(1-3), 295–309. doi:10.1016/j.foreco.2007.01.001
- Newton, P. F. (1997). Stand density management diagrams: Review of their development and utility in stand-level management planning. *Forest Ecology and Management*, 98(3), 251–265. doi: 10.1016/s0378-1127(97)00086-8
- Pretzsch, H. (2009). *Forest dynamics, growth and yield*. Berlin, Germany: Springer.
- Pretzsch, H., & Biber, P. (2005). A re-evaluation of Reineke's rule and stand density index. *Forest Science*, 51(4), 304–320.
- Quiñonez-Barraza, G., de los Santos-Posadas, H. M., Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia*, 49(4), 439–454. Retrieved from <http://www.scielo.org.mx/pdf/agro/v49n4/v49n4a7.pdf>
- Reineke, L. H. (1933). Perfecting a stand-density index for even-aged forests. *Journal of Agricultural Research*, 46(7), 627–638. Retrieved from <https://naldc.nal.usda.gov/download/IND43968212/PDF>
- Reyes-Hernandez, V., Comeau, P. G., & Bokalo, M. (2013). Static and dynamic maximum size–density relationships for mixed trembling aspen and white spruce stands in western Canada. *Forest Ecology and Management*, 289, 300–311. doi: 10.1016/j.foreco.2012.09.042
- Santiago-García, W., de los Santos-Posadas, H. M., Ángeles-Pérez, G., Valdez-Lazalde, J. R., del Valle-Paniagua, D. H., & Corral-Rivas, J. J. (2013). Auto-aclareo y guías de densidad para *Pinus patula* mediante el enfoque de regresión de frontera estocástica. *Agrociencia*, 47, 75–89. Retrieved from <http://www.scielo.org.mx/pdf/agro/v47n1/v47n1a7.pdf>

- Smith, D. M., Larson, B. C., Kelty, M. J., & Ashton, P. M. S. (1997). *The practice of silviculture: applied forest ecology*. USA: John Wiley and Sons, Inc.
- Statistical Analysis System (SAS Institute Inc.). (2011). SAS/ETS® 9.3 User's Guide. Cary, NC, USA: Author.
- Sterba, H., & Monserud, R. A. (1993). The maximum density concept applied to uneven-aged mixed-species stands. *Forest Science*, 39(3), 432–452. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/233494358_The_Maximum_Density_Concept_Applied_to_Uneven-Aged_Mixed-Species_Stands
- Torres-Rojo, J. M., & Velázquez-Martínez, A. (2000). Índice de densidad relativa para rodales coetáneos mezclados. *Agrociencia*, 34(4), 497–507. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/308142004_RELATIVE_STAND_DENSITY_INDEX_FOR_MIXED-EVEN-AGED_STANDS
- Wilson, F. (1946). Numerical expression of stocking in terms of height. *Journal of Forestry*, 44(10), 758–761.
- Yoda, K., Tatio, K., Husato, O., & Kazuo, H. (1963). Self-thinning in overcrowded pure stands under cultivated and natural conditions. *Journal of Biology*, 14, 107–129.
- Zeide, B. (1985). Tolerance and self-tolerance of trees. *Forest Ecology and Management*, 13(3-4), 149–166. doi: 10.1016/0378-1127(85)90031-3
- Zeide, B. (2004). Optimal stand density: a solution. *Canadian Journal of Forest Research*, 34(4), 846–854. doi:10.1139/x03-258
- Zeide, B. (2005). How to measure stand density. *Trees*, 19(1), 1–14. doi: 10.1007/s00468-004-0343-x
- Zhang, L., Bi, H., Gove, J. H., & Heath, L. S. (2005). A comparison of alternative methods for estimating the self-thinning boundary line. *Canadian Journal of Forest Research*, 35(6), 1507–1514. doi: 10.1139/x05-070