

# Nonlinear mixed effect models for predicting relationships between total height and diameter of oriental beech trees in Kestel, Turkey

Modelos no lineales de efectos mixtos para predecir relaciones entre altura total y diámetro de árboles de haya oriental en Kestel, Turquía

Ilker Ercanli.

Faculty of Forestry, Çankiri Karatekin University. 18200-Çankiri, Turkey.  
E-mail: ilkerercanli@karatekin.edu.tr Phone: +90376 133301, Fax: +903762136983.

## Abstract

Statistical nonlinear mixed effect models were used to predict relationships between the total height and diameter at breast height of individual trees in Oriental beech (*Fagus orientalis* Lipsky) stands in Kestel, Bursa, Northwestern Turkey. 124 sample plots were selected to represent various stand conditions such as site quality, age, and stand density. Nine generalized nonlinear height–diameter models were fitted and evaluated based on Akaike’s information criterion, Schwarz’s Bayesian Information Criterion (BIC), Root Mean Square Error (RMSE), Absolute Bias and Adjusted Coefficient of Determination ( $R^2_{adj}$ ). The nonlinear Schnute’s model was selected as the best predictive model. The height–diameter model based on the nonlinear mixed effect modeling approach accounted for 90.6 % of the total variance in height–diameter relationships and root mean square error (RMSE) values of 1.48 m. Various sampling scenarios that differed in sampling design and size of the selected sub-sample trees from the validation data set revealed that four randomly selected sub-sample trees in a given plot produced the best predictive results (43.3 % reduction of the sum of square errors, 98.4 % reduction of absolute bias, and 36.9 % reduction of the RMSE) in relation to the fixed effect predictions.

**Keywords:** Individual tree height–diameter, modeling, random parameter, calibration.

## Resumen

Modelos estadísticos no lineales de efectos mixtos se utilizaron para predecir las relaciones entre la altura total y el diámetro a la altura del pecho (DAP) en rodales de árboles de haya oriental (*Fagus orientalis* Lipsky) en Kestel, Bursa, al noroeste de Turquía. Un total de 124 parcelas de muestreo se seleccionaron para representar la calidad de sitio, edad y densidad de rodal. Nueve modelos no lineales generalizados de altura–diámetro se ajustaron y evaluaron con base en el criterio de información de Akaike, el criterio de información bayesiana de Schwarz, la raíz del cuadrado medio del error (RMSE por sus siglas en inglés), el sesgo absoluto y el coeficiente de determinación ajustado ( $R^2_{adj}$ ). El modelo no lineal de Schnute se seleccionó como el mejor modelo predictivo. El modelo de altura–diámetro basado en el enfoque del modelo no lineal de efectos mixtos representó 90.6 % de la varianza total en las relaciones de altura–diámetro y los valores de RMSE de 1.48 m. Varios escenarios que difieren en el diseño de muestreo y el tamaño de los árboles submuestra, seleccionados del conjunto de datos de validación, revelaron que cuatro árboles submuestra seleccionados al azar produjeron los mejores resultados predictivos (reducción de 43.3 % de la suma de errores cuadrados, 98.4 % del sesgo absoluto y 36.9 % de la RMSE) en relación con las predicciones de los efectos fijos.

**Palabras clave:** altura–diámetro del árbol, modelo, parámetros aleatorios, calibración.

Please cite this article as follows (APA6): Ercanli, Í. (2015). Nonlinear mixed effect models for predicting relationships between total height and diameter of Oriental beech trees in Kestel, Turkey. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 21(2), 0–0. doi: 10.5154/r.rchscfa.2015.02.006. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 21(1), 185–202. doi: 10.5154/r.rchscfa.2015.02.006



## Introduction

Individual tree height and diameter at breast height (DBH) are important forest inventory measurements used for total and merchantable volume estimations, growth and yield modeling, and site index predictions (Calama & Montero, 2004; Soares & Tomé, 2002). In a forest inventory, tree heights can be frequently measured in a subset of trees in sample plots; however, DBH is recorded for all sampled trees. This is because measuring DBH is simpler, more accurate, and cheaper than tree height measurements (Laar & Akça, 1997). Statistical equations modeling the relationships between height and diameter are used to estimate the tree heights from DBH measurements in a forest inventory (Martin & Flewelling, 1998; Huang, Titus, & Wiens, 1992). The accurate height-diameter models are considered as effective forest inventory tools for the prediction of height using DBH as predictor variable (Nanos, Calama, Montero, & Gil, 2004).

Since height-diameter relationships vary from one stand to another with various stand structures, a simple statistical model cannot be used to estimate tree heights in all stand situations within a forest (Castedo, Diéguez-Aranda, Barrio, Sánchez, & von Gadow, 2006). Generalized height-diameter models have been recognized as an alternative approach to estimate height-diameter relationships in different stands within a forest (Adame, del Río & Cañellas, 2008; Crecente-Campo, Tomé, Soares, & Diéguez-Aranda, 2010; Paulo, Tomé, & Tomé, 2011). Therefore, a generalized height-diameter model has provided a solution to predict region-wide height-diameter relationships. However, height-diameter data are commonly obtained from trees in stands with different growing conditions (Schmidt, Kiviste, & von Gadow, 2010). Such a clustered and hierarchical data structure results in highly correlated data, also called an auto-correlation problem (Gregoire, 1987; West, Ratkowsky, & Davis, 1984). When the height-diameter models are fitted using these clustered data, the use of ordinary least squares (OLS) for linear models or nonlinear least squares (NLS) technique for nonlinear models leads to biased estimates of the confidence interval for model parameters (Searle, Casella, & McCulloch, 1992).

The linear or nonlinear mixed effect modeling approach has been increasingly used as an alternative statistical method to deal with the auto-correlation problems caused by a hierarchical data structure (Gregoire, 1987; Lappi, 1997; Calama & Montero, 2004). In linear or nonlinear mixed effect modeling, the fixed parameter for population-specific and random parameter for sampling unit-specific effect are simultaneously estimated by defining a covariance matrix in the same model structure (Calama & Montero, 2004). The inclusion of random parameters into the

## Introducción

La altura y el diámetro a la altura del pecho (DAP) del árbol son mediciones importantes del inventario forestal que se utilizan en las estimaciones del volumen total y comercial, el crecimiento y el modelo de rendimiento, y las predicciones del índice de sitio (Calama & Montero, 2004; Soares & Tomé, 2002). En un inventario forestal, regularmente, la altura se puede medir en un subconjunto de árboles en parcelas de muestreo; sin embargo, para todos los árboles muestreados se registra el DAP. Esto es porque la medición del DAP es más sencilla, precisa y barata que las mediciones de altura (Laar & Akça, 1997). Las ecuaciones estadísticas que modelan las relaciones entre la altura y el diámetro se utilizan para estimar la altura de los árboles a partir de las mediciones del DAP en un inventario forestal (Huang, Titus, & Wiens, 1992; Martin & Flewelling, 1998). Los modelos precisos de altura-diámetro se consideran herramientas de inventario forestal eficaces para la predicción de altura, utilizando el DAP como variable predictora (Nanos, Calama, Montero, & Gil, 2004).

Un modelo estadístico sencillo no se puede utilizar para estimar la altura de los árboles en todas las situaciones de rodal dentro de un bosque, ya que las relaciones de altura-diámetro varían de un rodal a otro con distintas estructuras (Castedo, Diéguez-Aranda, Barrio, Sánchez, & von Gadow, 2006). Los modelos generalizados de altura-diámetro han sido reconocidos como un enfoque alternativo para estimar las relaciones de altura-diámetro en diferentes rodales dentro de un bosque (Adame, del Río & Cañellas, 2008; Crecente-Campo, Tomé, Soares, & Diéguez-Aranda, 2010; Paulo, Tomé, & Tomé, 2011). Por lo tanto, un modelo generalizado de altura-diámetro proporciona una solución para predecir las relaciones de altura-diámetro en toda la región; sin embargo, los datos de altura-diámetro comúnmente se obtienen a partir de árboles en rodales con diferentes condiciones de crecimiento (Schmidt, Kiviste, & von Gadow, 2010). Tal estructura de datos agrupados y jerárquicos resulta en datos altamente correlacionados, también conocidos como un problema de autocorrelación (Gregoire, 1987; West, Ratkowsky, & Davis, 1984). Cuando los modelos de altura-diámetro se ajustan utilizando estos datos agrupados, el uso de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) para modelos lineales o la técnica de mínimos cuadrados no lineales (NLS) para modelos no lineales conducen a estimaciones sesgadas del intervalo de confianza para los parámetros del modelo (Searle, Casella, & McCulloch, 1992).

El enfoque del modelo lineal o no lineal de efectos mixtos se ha utilizado cada vez más como un método estadístico alternativo para hacer frente a los problemas de autocorrelación causados por una

model structure enables the estimation of the residual variance of height–diameter relationships among clustered or nested sample units located in different stands (Calama & Montero, 2004). Furthermore, the mixed effect height–diameter models can be calibrated for locations that have not been sampled previously and further applied without calibration in which the height prediction models were the simple fixed effect models. These useful characteristics in the mixed effect modeling technique provide more efficient and more accurate height predictions for nested and clustered sample units in different forest stands than the OLS or NLS techniques.

The objectives of the present study were 1) to use statistical nonlinear mixed effect models to predict the relationships between total height and diameter of Oriental beech (*F. orientalis* Lipsky) trees located in Kestel-Bursa forests in Northwestern Turkey and 2) to evaluate calibration strategies based on different sampling scenarios, including the selection of a different number of sub-sample trees for predicting random parameters in describing unit-specific effect of sample units.

## Materials and methods

### Data

The data used in this study were obtained from even-aged and pure Oriental beech (*Fagus orientalis* Lipsky) stands located in the Kestel forests in northwestern Turkey (40° 00' 00" - 40° 12' 10" N, 29° 13' 00" - 29° 21' 54" E). In the even-aged Oriental beech stands, 124 sample plots were selected in the summer of 2005 to represent various stand conditions such as site quality, age and stand density.

The size of circular sample plots ranged from 400 to 800 m<sup>2</sup> to include a minimum of 30 to 35 trees in sample plots; the number of trees was dependent on stand crown closure. In each sample plot, DBH was measured to 0.1 cm precision using calipers for every living tree with a DBH > 8 cm. Total tree height (h) was measured on a subset of trees created by selecting two trees for each 4-cm diameter class using a Blume-Leiss Altimeter (0.1 m precision, Trigonometric Measurement Model originated from Germany).

In addition, the height and diameter measurements were obtained from dominant and co-dominant trees that were selected based on the 100 dominant and co-dominant highest trees per unit area level (e. g. four highest trees in a 0.04-ha plot). In addition to the tree level measurements, the number of stems per hectare (N·ha<sup>-1</sup>), stand basal area (m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>), dominant diameter (cm) and dominant height (m) were calculated as part of the plot level information for each sample plot.

estructura de datos jerárquicos (Gregoire, 1987; Lappi, 1997; Calama & Montero, 2004). En el modelo lineal o no lineal de efectos mixtos, el parámetro fijo para la población específica y el parámetro aleatorio para el efecto de muestreo de unidad específica se estiman de forma simultánea mediante la definición de una matriz de covarianza en la misma estructura del modelo (Calama & Montero, 2004). La inclusión de los parámetros aleatorios en la estructura del modelo permite la estimación de la varianza residual de las relaciones de altura-diámetro entre las unidades de muestra agrupadas o anidadas, ubicadas en diferentes rodales (Calama & Montero, 2004). Además, los modelos de efectos mixtos de altura-diámetro pueden calibrarse para lugares que no han sido muestreados previamente y aplicarse sin calibración en el que los modelos de predicción de altura fueron los modelos fijos de efectos simples. Estas características útiles en la técnica del modelo de efectos mixtos proporcionan predicciones de altura más eficientes y precisas para las unidades de muestra anidadas y agrupadas en diferentes masas forestales que las técnicas MCO o NLS.

Los objetivos del presente estudio fueron 1) utilizar modelos estadísticos no lineales de efectos mixtos para predecir las relaciones entre la altura total y el diámetro de los árboles de haya oriental (*Fagus orientalis* Lipsky), en los bosques de Kestel-Bursa al noroeste de Turquía; y 2) evaluar las estrategias de calibración basándose en los diferentes escenarios de muestreo, incluyendo la selección de una cantidad distinta de árboles submuestra para predecir los parámetros aleatorios en la descripción de efecto de unidad específica de las unidades de muestreo.

## Materiales y métodos

### Datos

Los datos utilizados en este estudio se obtuvieron a partir de rodales puros de haya oriental (*F. orientalis*) de la misma edad, situados en los bosques de Kestel al noreste de Turquía (40° 00' 00" - 40° 12' 10" N, 29° 13' 00" - 29° 21' 54" E). En los rodales de haya oriental de la misma edad, se seleccionaron 124 parcelas de muestreo en el verano de 2005 para representar las diversas condiciones de rodal como la calidad del sitio, la edad y la densidad.

El tamaño de las parcelas circulares de muestreo varió desde 400 hasta 800 m<sup>2</sup> para incluir un mínimo de 30 a 35 árboles; el número de árboles dependió del cierre de la corona del rodal. En cada parcela de muestreo, el DAP se midió con 0.1 cm de precisión usando pinzas por cada árbol vivo con DAP > 8 cm. La altura total del árbol (h) se midió en un subconjunto de árboles creados mediante la selección de dos árboles para cada clase de diámetro de 4 cm, usando

Dominant height and diameter were calculated by averaging the height and diameter of the dominant and co-dominant trees.

In total, 1,057 pairs of height–diameter measurements in 124 sample plots were used to analyze the relationships among tree heights, diameter and stand attributes, and to develop tree height prediction models. The sample plots were randomly split into two data sets, the model fitting and the validation data sets, using the random number function RANUNI implemented in the SAS statistical package (Statistical Analysis System [SAS Institute], 2009). Of those, about 85 % (907 trees in 104 sample plots) were used to fit model parameters, and the remaining 150 trees in 20 sample plots were reserved for the evaluation of the best predictive model and also used to determine the calibration response for the nonlinear mixed effect models. The summary statistics, such as the mean, standard deviations, minimum and maximum for tree and stand variables used for model fitting and validation data set, are given in Table 1.

#### Selection of the best statistical regression models

In this study, nine nonlinear functions were used to develop generalized height–diameter models proposed in recent studies (Table 2). These statistical models were chosen because they display better fitting results for predicting the relationships between height and DBH than other models.

First, the nonlinear functions were fitted using the model fitting data (907 trees in 104 sample plots). The

un altímetro Blume-Leiss (0.1 m de precisión, modelo de medición trigonométrica originado en Alemania). Las mediciones de altura y diámetro se obtuvieron de los árboles dominantes y codominantes que fueron seleccionados con base en los 100 árboles dominantes y codominantes más altos por nivel de unidad de área (por ejemplo, cuatro árboles más altos en una parcela de 0.04 ha). Además de las mediciones del nivel del árbol, el número de tallos por hectárea ( $N \cdot ha^{-1}$ ), el área basal en pie ( $m^2 \cdot ha^{-1}$ ), el diámetro dominante (cm) y la altura dominante (m) se calcularon como parte de la información sobre el nivel de la parcela para cada parcela de muestreo. La altura dominante y el diámetro se calcularon promediando la altura y el diámetro de los árboles dominantes y codominantes.

En total, 1,057 pares de mediciones de altura-diámetro se utilizaron en 124 parcelas de muestreo para analizar las relaciones entre la altura de los árboles, el diámetro y los atributos del rodal, y para desarrollar los modelos de predicción de altura de los árboles. Las parcelas de muestreo se dividieron al azar en dos conjuntos de datos, el ajuste del modelo y datos de validación, utilizando la función números aleatorios RANUNI, implementada en el paquete estadístico SAS (Statistical Analysis System [SAS Institute], 2009). De esos 1,057 árboles, 907 árboles de 104 parcelas de muestra (85 %) se utilizaron para ajustar los parámetros del modelo, y los 150 árboles restantes de 20 parcelas de muestra se reservaron para la evaluación del mejor modelo predictivo y para determinar la respuesta de calibración para los modelos no lineales de efectos mixtos. En el Cuadro 1 se presentan las estadísticas de resumen como la media, la desviación estándar,

**Table 1. Summary statistics for sample trees (*Fagus orientalis*) originated from fitting and validation data.**

**Cuadro 1. Estadísticas de resumen para árboles muestra (*Fagus orientalis*) originadas a partir de datos de ajuste y validación.**

	Variables	Min.	Max.	Mean/Media	Std. deviation / Desviación estandar
Fitting data / Datos ajustados	d (cm)	8.00	72.00	19.87	10.51
	h (m)	2.50	30.00	15.60	4.88
	$d_o$ (cm)	10.00	71.00	26.53	13.88
	$h_o$ (m)	5.00	30.00	17.20	4.99
	N (trees·ha <sup>-1</sup> ) / N (árboles·ha <sup>-1</sup> )	37.50	2,950.00	1,060.38	506.84
	BA (m <sup>2</sup> ·ha <sup>-1</sup> )	0.26	35.40	12.71	6.85
Validation data / Datos de validación	d (cm)	8.00	64.00	22.16	9.916
	h (m)	8.00	26.00	17.83	4.40
	$d_o$ (cm)	13.00	64.00	30.69	12.45
	$h_o$ (m)	11.50	26.00	19.78	3.99
	N (trees·ha <sup>-1</sup> )	475.00	2,025.00	1,142.67	423.99
	BA (m <sup>2</sup> ·ha <sup>-1</sup> )	3.21	31.28	13.99	7.16

d: diameter at breast height (cm), h: total tree height (m),  $d_o$ : dominant diameter (cm),  $h_o$ : dominant height (m), N: number of trees of sample plot, BA: basal area of sample plot. / d: Diámetro a la altura del pecho (cm), h: Altura total de los árboles (m),  $d_o$ : Diámetro dominante (cm),  $h_o$ : Altura dominante (m), N: Número de árboles de la parcela muestra, BA: Área basal de la parcela muestra.

**Table 2. The nonlinear height-diameter functions tested in *Fagus orientalis* trees in Kestel, Turkey.**  
**Cuadro 2. Funciones no lineales altura-diámetro evaluadas en árboles de *Fagus orientalis* en Kestel, Turquía.**

Function number / Número de función	Mathematical form / Forma matemática	References / Referencias
1	$h = 1.3 + (H_0 - 1.3) \cdot \frac{(1 - e^{-b_0 \cdot d})}{(1 - e^{-b_0 \cdot D_0})}$	Meyer (1940) / Meyer (1940)
2	$h = 1.3 + \left( b_0 \cdot \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{D_0} \right) + \left( \frac{1}{H_0 \cdot 1.3} \right)^2 \right)^{-2}$	Loetsch, Zöher, and Haller (1973) / Loetsch, Zöher, y Haller (1973)
3	$h = 1.3 + (H_0 - 1.3) \cdot \left( 1 + b_0 \cdot (H_0 - 1.3) \cdot \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{D_0} \right) \right)^{-1}$	Prodan (1965) / Prodan (1965)
4	$h = 1.3 + b_0 \cdot H_0^{b_1} \cdot d^{b_2} \cdot H_0^{b_3}$	Hui and von Gadow (1993) / Hui y von Gadow (1993)
5	$h = H_0 \cdot \left( 1 + (b_0 + b_1 \cdot H_0 + b_2 \cdot D_g) \cdot e^{b_3 \cdot H_0} \right) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{b_4 \cdot d}{H_0}} \right)$	Soares and Tomé (2002) / Soares y Tomé (2002)
6	$h = 1.3 + \left( (b_0 + b_1 \cdot BA + b_2 \cdot H_0) \cdot e^{\frac{b_3}{d}} \right)$	Huang, Price, and Titus (2000) modified by Adame et al. (2008) / Huang, Price, y Titus (2000) modificado por Adame et al. (2008)
7	$h = 1.3 + (b_0 \cdot H_0^{b_1}) \cdot \left( 1 - e^{-b_2 \cdot \left( \frac{N}{BA} \right)^{b_3} \cdot d} \right)^{b_4}$	Richards (1959) modified by Sharma and Parton (2007) / Richards (1959) modificado por Sharma y Parton (2007)
8	$h = 1.3 + b_0 \cdot (H_0 - 1.37)^{b_1} \cdot e^{(-b_2 \cdot d - b_3 + b_4 \cdot BA)}$	Lynch, Hitch, Huebschmann, and Murphy (1999) modified by Budhathoki, Lynch, and Guldin (2008) / Lynch, Hitch, Huebschmann, y Murphy (1999) modificado por Budhathoki, Lynch, y Guldin (2008)
9	$h = \left( 1.3^{b_0} + (H_0^{b_0} - 1.3^{b_0}) \frac{(1 - e^{-b_1 \cdot d})}{(1 - e^{-b_1 \cdot D_0})} \right)^{\frac{1}{b_0}}$	Schnute (1981) modified by Castedo et al. (2006) / Schnute (1981) modificado por Castedo et al. (2006)

estimation of the parameters of these functions was done with the NLIN procedure available in SAS/STAT® 9 software (SAS Institute, 2004). These functions were compared based on evaluations of the magnitudes and distributions of models' residual and five goodness-of-fit statistics: Akaike's information criterion (AIC), Schwarz's Bayesian Information Criterion (BIC), Root Mean Square Error (RMSE), Absolute Bias and Adjusted Coefficient of Determination ( $R^2_{adj}$ ). The expressions for these statistical criteria were defined as follows:

$$AIC = -2\log L + 2q$$

$$BIC = -2\log(L) + q\log(N)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (h_{ij} - \hat{h}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^N n_i - p}}$$

$$Absolute\ Bias = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} |h_{ij} - \hat{h}_{ij}|}{\sum_{i=1}^N n_i}$$

el mínimo y máximo para el árbol, las variables de la masa utilizadas para el ajuste del modelo y el conjunto de datos de validación.

### Selección de los mejores modelos de regresión estadística

En este estudio, nueve funciones no lineales se utilizaron para desarrollar modelos generalizados de altura-diámetro propuestos en estudios recientes (Cuadro 2). Estos modelos estadísticos se eligieron porque muestran mejores resultados de ajuste para predecir las relaciones entre la altura y el DAP en comparación con otros modelos.

En primer lugar, las funciones no lineales se ajustaron utilizando los datos de ajuste del modelo (907 árboles en 104 parcelas de muestreo). Los parámetros de estas funciones se estimaron con el procedimiento disponible de NLIN en el programa SAS/STAT® 9 (SAS Institute, 2004). Estas funciones se compararon con base en las evaluaciones de las magnitudes y distribuciones de los

Adjusted coefficient of determination ( $R^2_{adj}$ ) =

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (h_{ij} - \hat{h}_{ij})^2 (\sum_{i=1}^N n_i - 1)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (h_{ij} - \bar{h}_i)^2 (\sum_{i=1}^N n_i - p - 1)}$$

where:

$L$  = Maximum value of the log likelihood function

$q$  = Number of parameters in the model

$p$  = Number of coefficients in the model

$N$  = Number of sample plots

$N_i$  = Number of trees in the  $i$ th plot

$\hat{h}_i$  = Mean height in the  $i$ th sample plot

$h_{ij}$  and  $\hat{h}_{ij}$  =  $j$ th observed and estimated  $h$  in  $i$ th sample plot, respectively.

Smaller values of AIC, BIC, RMSE and the absolute Bias indicate better model fit results. Higher values of  $R^2_{adj}$  (the adjusted coefficient of determination) give the predictable proportion of the variance of the dependent variable, height, from the independent variables.

The nonlinear mixed effect modeling approach was then used to estimate simultaneously fixed- and random-effects parameters of the height-diameter model that was selected as the best predictive model based on these statistical criteria.

#### Statistical nonlinear mixed effect modeling approach

The nonlinear height-diameter functions were fitted using dataset with multiple measurements taken in sample plots from different forest stands. In such nested data, structure measurements are not independent; the data is highly correlated, which will consequently result in unexplained variation of height-diameter relationships among clustered or nested sample units. To deal with this auto-correlation problem, a nonlinear mixed effect modeling procedure was applied to the best predictive height-diameter model by simultaneously fitting both fixed and random parameters in its model structure.

The nonlinear mixed effect modeling approach has some basic assumptions including the multivariate normal distribution of the residual terms and random-effects parameter (Calama & Montero, 2004).

$$u_i \text{ and } v_i \sim N(0, D_i) \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, R_i)$$

where:

$D$  = Positive-definite variance-covariance matrix  $q \times q$  for the random-effects representing the among-plot variability

$R_i$  = Intra plot variance-covariance matrix.

residuales del modelo, y cinco estadísticas de bondad de ajuste: el criterio de información de Akaike (AIC), el criterio de información bayesiano de Schwarz (BIC), la raíz del cuadrado medio del error (RMSE), el sesgo absoluto y el coeficiente de determinación ajustado ( $R^2_{adj}$ ). Las expresiones para estos criterios estadísticos se definen de la siguiente manera:

$$AIC = -2\log L + 2q$$

$$BIC = -2\log(L) + q\log(N)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (h_{ij} - \hat{h}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^N n_i - p}}$$

$$Sesgo \text{ absoluto} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} |h_{ij} - \hat{h}_{ij}|}{\sum_{i=1}^N n_i}$$

Coefficiente de determinación ajustado ( $R^2_{adj}$ ) =

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (h_{ij} - \hat{h}_{ij})^2 (\sum_{i=1}^N n_i - 1)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (h_{ij} - \bar{h}_i)^2 (\sum_{i=1}^N n_i - p - 1)}$$

donde:

$L$  = Valor máximo de la función de verosimilitud

$q$  = Número de parámetros en el modelo

$p$  = Número de coeficientes en el modelo

$N$  = Número de parcelas de muestreo

$N_i$  = Número de árboles en la  $i$ ésima parcela

$\hat{h}_i$  = altura media en la  $i$ ésima parcela

$h_{ij}$  y  $\hat{h}_{ij}$  =  $j$ ésima  $h$  observada y estimada en la  $i$ ésima parcela, respectivamente

Los valores más bajos de AIC, BIC, RMSE y sesgo absoluto indican mejores resultados de ajuste del modelo. Los valores más altos de  $R^2_{adj}$  dan la proporción predecible de la varianza de la variable dependiente (la altura) con respecto de las variables independientes.

El enfoque del modelo no lineal de efectos mixtos se utilizó para estimar simultáneamente los parámetros de efectos aleatorios y fijos del modelo de altura-diámetro seleccionado como el mejor modelo predictivo, basado en dichos criterios estadísticos.

#### Enfoque del modelo estadístico no lineal de efectos mixtos

Las funciones no lineales de altura y diámetro se ajustaron utilizando un conjunto de datos con múltiples mediciones tomadas en parcelas de muestreo de diferentes masas forestales. En tales datos anidados, las mediciones de la estructura no son independientes; los datos están altamente correlacionados, lo que dará lugar a la variación no explicada de las relaciones de altura y diámetro entre las unidades de muestra

The variances-covariance structures were defined by  $D_i$  and  $R_i$  matrixes to model random variability existing within and among plot levels (Calama & Montero, 2004). The  $D$  matrix is common to all plots and typically assumed to be an unstructured covariance matrix and identical for all plots, which describes variability for among-plot level (Huang, Meng, & Yang, 2009). In this study, the  $D$  matrix with two random parameters,  $u_j$  and  $v_j$ , was considered to model the variability among sampling plots, and the variance-covariance matrix structure is defined as below;

$$D_i = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

where:

$\sigma_u$  = Variance for the random effect  $u$

$\sigma_v$  = Variance for the random effect  $v$

$\sigma_{uv}$  = Covariance among random effects (Castedo et al., 2006).

The other variance-covariance component,  $R_i$  matrix, is important to account for the variability observed for within-sample plots. Castedo et al. (2006) and Paulo et al. (2011) used the simplified structures for the within-sample plots variance-covariance  $R_i$  matrix, which assumed that the variance in within-sample plots is homogenous and residuals are uncorrelated;

$$R_i = \sigma^2 G_i$$

where:

$\sigma^2$  = Value for scaling error variance of the model

$G_i = n \times n$  diagonal matrix describing the non-constant variances of errors by predicting model (Castedo et al., 2006).

The variance components and fixed parameters of the best predictive height-diameter nonlinear model were estimated with PROC NLMIXED procedures of the SAS/ETS 9 package (SAS Institute, 2004). The maximum-likelihood (ML) method was used to fit the nonlinear mixed effect regression. The adaptive Gaussian quadrature was used in the computation of the integral over the random effects as described by Pinheiro and Bates (2000). Furthermore, the PROC NLMIXED procedure was performed assuming the homogenous within-tree variance and uncorrelated residuals.

### Calibration response

A vector of random parameters was predicted as calibration response for height-diameter models and the prior measurements of sub-sample trees were used to obtain the predictions for specific stands. To calibrate the nonlinear mixed height-diameter models for specific sample plots, random parameters,

agrupadas o anidadas. Para hacer frente a este problema de autocorrelación, un procedimiento del modelo no lineal de efectos mixtos se aplicó al mejor modelo predictivo de altura y diámetro mediante el ajuste simultáneo de ambos parámetros fijos y aleatorios en la estructura del modelo.

El enfoque del modelo no lineal de efectos mixtos tiene algunos supuestos básicos que incluyen la distribución normal multivariante de los términos residuales y parámetros de efectos aleatorios (Calama & Montero, 2004).

$$u_i \text{ and } v_i \sim N(0, D_i) \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, R_i)$$

donde:

$D$  = Matriz de varianza-covarianza positiva-definida  $q \times q$  para los efectos aleatorios que representa la variabilidad entre parcelas

$R_i$  = Matriz de varianza-covarianza intraparcela.

Las estructuras de varianzas-covarianza fueron definidas por las matrices  $D_i$  y  $R_i$  para modelar la variabilidad aleatoria existente dentro y entre los niveles de la parcela (Calama & Montero, 2004). La matriz  $D$  es común a todas las parcelas y típicamente asumida como una matriz de covarianza no estructurada e idéntica, que describe la variabilidad para el nivel entre parcelas (Huang, Meng, & Yang, 2009). En este estudio, la matriz  $D$  con dos parámetros aleatorios,  $u_j$  y  $v_j$ , se consideró para modelar la variabilidad entre parcelas de muestreo, mientras que la estructura de la matriz de varianza-covarianza se definió de la siguiente manera;

$$D_i = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

donde:

$\sigma_u$  = Varianza para el efecto aleatorio  $u$

$\sigma_v$  = Varianza para el efecto aleatorio  $v$

$\sigma_{uv}$  = Covarianza entre efectos aleatorios (Castedo et al., 2006).

El otro componente de varianza-covarianza, la matriz  $R_i$ , es importante para tener en cuenta la variabilidad observada dentro de la muestra de las parcelas. Castedo et al. (2006) y Paulo et al. (2011) utilizaron las estructuras simplificadas para la matriz  $R_i$  de varianza-covarianza dentro de la muestra de las parcelas, quienes asumieron que la variación en la muestra dentro de las parcelas es homogénea y que los residuos no están correlacionados:

$$R_i = \sigma^2 G_i$$

donde:

$\sigma^2$  = Valor para ampliar la varianza de error del modelo

$G_i = n \times n$  matriz diagonal que describe las varianzas

$u_i$  and  $v_i$  for a given plot, were predicted using the best linear unbiased predictors, BLUPs (Lappi, 1991; Mehtätalo, 2004);

$$\hat{b}_i \approx \hat{D}\hat{Z}_i^T (\hat{R}_i + Z_i\hat{D}_i\hat{Z}_i^T)^{-1} e_{ij}$$

where:

- $\hat{b}_i$  = Estimated random parameters for specific plot
- $\hat{D}_i$  =  $q \times q$  variance-covariance matrix for the among-plot variability (common for all plots)
- $\hat{R}_i$  = estimated  $k \times k$  variance-covariance matrix for within-plot variability
- $Z_i$  =  $k \times q$  matrix of partial derivatives of the nonlinear function with respect to random parameters
- $\hat{b}_i, \hat{e}_{ij}$  = Residual value defined as the difference between observed and predicted heights by the model including only fixed parameters (Crecente-Campo et al., 2010).

The comprehensive formula and explanations for components of BLUPs equation are specified by Calama and Montero (2004) and Castedo et al. (2006).

Evaluation of the calibration response for nonlinear mixed effect height–diameter models was done by comparing the sampling scenarios with different height sampling design and sizes from the validation data set with 150 trees in 20 sample plots. These scenarios were based on the selection of prior trees according to stand size categories, e.g. the largest, the smallest, and the medium-size trees per plot in a given number of trees (Crecente-Campo et al., 2010). The sub-sampling scenarios with more than five trees, e.g. nine to 10 trees, were excluded from the evaluation because they involve more laborious and time-consuming tree measurements than other sampling tree techniques. The sub-sampling procedures, including the selection of three to five trees, were preferred in other studies (Adame et al., 2008; Paulo et al., 2011). Thus, the sampling scenarios used here are as follows: 1) Total height of three to five randomly selected trees per plot, 2) Total height of three to five highest trees per plot, 3) Total height of three to five medium-size trees, considered as closest to the quadratic mean diameter at breast height per plot and 4) Total height of three to five lowest trees in a plot.

Random parameters were calculated using BLUP estimators on a subsample of trees selected by the sampling scenarios. They were integrated into the height–diameter model structure by adding them to the fixed effect parameters. Such calibrated height–diameter models were used to predict height values of trees in 20 sample plots. The calibration responses in sampling scenarios were compared using statistics criteria such as Sum of Squared Error (SSE), Absolute Bias and RMSE, where the observed heights were the

no constantes de errores mediante la predicción del modelo (Castedo et al., 2006).

Los componentes de varianza y parámetros fijos del mejor modelo no lineal predictivo de altura y diámetro se estimaron con los procedimientos PROC NLMIXED del paquete SAS / ETS 9 (SAS Institute, 2004). El método de máxima verosimilitud se utilizó para ajustar la regresión no lineal de efectos mixtos. La cuadratura adaptativa de Gauss se utilizó en el cálculo de la integral sobre los efectos aleatorios como lo describe Pinheiro y Bates (2000). Además, el procedimiento PROC NLMIXED se llevó a cabo asumiendo varianza homogénea dentro del árbol y residuos no correlacionados.

### Respuesta de calibración

Un vector de parámetros aleatorios se predijo como respuesta de calibración para los modelos de altura y diámetro, y las mediciones anteriores de los árboles submuestras se utilizaron para obtener las predicciones de rodales específicos. Para calibrar los modelos no lineales de altura y diámetro de efectos mixtos para parcelas de muestreo específicas, los parámetros aleatorios  $u_i$  y  $v_i$  para una parcela determinada se pronosticaron usando los mejores predictores lineales insesgados (BLUPs) (Lappi, 1991; Mehtätalo, 2004);

$$\hat{b}_i \approx \hat{D}\hat{Z}_i^T (\hat{R}_i + Z_i\hat{D}_i\hat{Z}_i^T)^{-1} e_{ij}$$

donde:

- $\hat{b}_i$  = Parámetros aleatorios estimados para parcela específica
- $\hat{D}_i$  =  $q \times q$  matriz de varianza-covarianza para la variabilidad entre parcelas (común para todas las parcelas)
- $\hat{R}_i$  =  $k \times k$  matriz de varianza-covarianza estimada para la variabilidad dentro de la parcela
- $\hat{Z}_i$  =  $k \times q$  matriz de derivadas parciales de la función no lineal con respecto a los parámetros aleatorios
- $\hat{b}_i, \hat{e}_{ij}$  = Valor residual definido como la diferencia entre las alturas observadas y las predichas por el modelo que incluye sólo parámetros fijos (Crecente-Campo et al., 2010).

La fórmula completa y las explicaciones para los componentes de la ecuación BLUP son especificadas por Calama y Montero (2004) y Castedo et al. (2006).

La respuesta de calibración para los modelos no lineales de altura y diámetro de efectos mixtos se evaluó comparando los escenarios con diferente diseño de muestreo de altura y tamaños de los datos de validación establecidos con 150 árboles en 20 parcelas de muestreo. Estos escenarios se basan en la selección de los árboles más importantes de acuerdo con las categorías de tamaño en pie; por ejemplo, el



heights obtained from sample plots and the predicted heights were obtained from the calibrated height-diameter model for the validation data set.

## Results and discussion

### Height-diameter model selection

The parameter estimates with probability levels and the goodness-of-fit statistics, including AIC, BIC, RMSE, Absolute Bias and  $R^2$ , for the studied nonlinear height-diameter models are given in Table 3. All parameters of estimates for these nonlinear models were found to be significant ( $P = 0.05$ ). RMSE was between 1.79 m and 2.04 m, absolute bias between 3.23 m and 4.18 m, and  $R^2$  between 0.86 m and 0.82 m in all tested models. Fitting results in the studied nonlinear models accounted for more than 82.3 % of total variance in height-diameter relationships, whereas RMSE was less than 2.04 m and Absolute bias less than 4.18 m.

On the basis of the goodness-of-fit statistics, the Schnute (1981) model (Eq. 9, Table 3), showed better fitting ability with AIC (1,068.11), BIC (1,077.73),  $R^2$  (0.86), RMSE (1.79), and Absolute bias (3.23) than the other studied functions. Therefore, the Schnute (1981) model was selected as the best height-diameter model for use in further analyses. This model was used to predict tree height based on dominant height and dominant diameter with tree diameter as the independent variable.

más grande, el más pequeño y los árboles de tamaño mediano por parcela en un número determinado de árboles (Crecente-Campo et al., 2010). Los escenarios submuestreo con más de cinco árboles, ejemplo de 9 a 10 árboles, fueron excluidos de la evaluación porque implican mediciones más laboriosas y lentas en comparación con otras técnicas de muestreo. Los procedimientos de submuestreo, incluyendo la selección de tres a cinco árboles, se prefirieron en otros estudios (Adame et al., 2008; Paulo et al., 2011). Por tanto, los escenarios de muestreo utilizados en este trabajo son los siguientes: 1) Altura total de tres a cinco árboles seleccionados al azar por parcela; 2); Altura total de tres a cinco árboles más altos por parcela, 3); Altura total de tres a cinco árboles de tamaño mediano, considerado como más cercano al diámetro medio cuadrático a la altura del pecho por parcela y 4) Altura total de tres a cinco árboles de los más bajos en una parcela.

Los parámetros aleatorios se calcularon utilizando estimadores BLUP en una submuestra de árboles seleccionados por los escenarios de muestreo. Los parámetros se integraron en la estructura del modelo de altura-diámetro, añadiéndolos a los parámetros de efectos fijos. Estos modelos calibrados de altura-diámetro se utilizaron para predecir los valores de altura de los árboles en 20 parcelas de muestreo. Las respuestas de calibración en los escenarios de muestreo se compararon mediante criterios estadísticos tales SSE,

**Table 3. The parameter estimations with the goodness-of-fit statistics for the nonlinear height-diameter models studied in *Fagus orientalis* trees in Kestel, Turkey.**

**Cuadro 3. Estimaciones de los parámetros con la estadística de bondad de ajuste de los modelos no lineales de altura-diámetro estudiados en *Fagus orientalis* en Kestel, Turquía.**

Function number / Número de función	Parameters / Parámetros					Goodness-of-fit statistics / Estadística de bondad de ajuste				
	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$R^2_{adj}$	AIC	BIC	Absolute bias / Sesgo absoluto	RMSE
1	0.084***					0.856	1,110.846	1,115.656	3.399	1.843
2	0.824***					0.861	1,074.863	1,079.673	3.267	1.807
3	0.401***					0.860	1,081.366	1,086.176	3.290	1.814
4	0.505*	0.983***	0.319**	-0.190**		0.823	1,301.394	1,320.635	4.180	2.044
5	-0.001ns	0.001*	-0.000**	0.072*	-2.363***	0.854	1,122.754	1,146.805	3.429	1.851
6	2.260***	0.017*	0.896***	-3.933***		0.833	1,248.793	1,268.034	3.945	1.986
7	1.358***	0.877***	0.046***	0.175***	0.717***	0.840	12,010.391	1,234.442	3.777	1.943
8	2.021***	0.778***	5.009**	1.132***	0.001*	0.833	1,244.842	1,268.892	3.923	1.980
9	1.796***	0.047***				0.863	1,068.119	1,077.739	3.239	1.799

\*:  $P = 0.05$ , \*\*:  $P = 0.01$ , \*\*\*:  $P = 0.001$ , AIC: Akaike's information criterion, BIC: Schwarz's Bayesian Information Criterion, RMSE: Root Mean Square Error.

\* $P = 0.05$ , \*\* $P = 0.01$ , \*\*\* $P = 0.001$ , AIC: Criterio de información de Akaike, BIC: Criterio de información bayesiana de Schwarz, RMSE: Raíz del cuadrado medio del error.

Stand dominant height and diameter are important stand quality attributes that affect the relationship between the growth in height and diameter, which in turn can be further modeled using Eichorn's rule (Eichorn, 1902). The use of site quality indices, e. g. stand dominant height and diameter, in modeling the relationships between height and diameter have been previously proposed (Adame et al., 2008; Crecente-Campo et al., 2010; Paulo et al., 2011; Sánchez-González, Cañellas, & Montero, 2007).

### Nonlinear mixed effect modeling

In a nonlinear mixed effect modeling, the parameters of the model must be set to random or fixed effect parameters in a given model structure. Table 4 shows the AIC and BIC statistics that were calculated using none (all parameters are fixed-effect parameters), one ( $b_0$  or  $b_1$  is a random parameter), and two (both  $b_0$  and  $b_1$  are random parameters) random-effects parameters of the Schnute (1981) (Eq. 9, Table 2). For random or fixed parameters, the lowest values of AIC (730.48) and BIC (737.05), and the highest value for  $R^2$  (0.90) were obtained in a nonlinear mixed effect modeling assuming two random parameters,  $b_0$  and  $b_1$  together, in a model structure. It was concluded that the best predictive height-diameter model could be obtained by the nonlinear mixed-effect model in Eq. 9 (Table 2) with two random parameters. The general expression of the nonlinear mixed effect in Eq. 9 (Table 2), including  $b_0$  and  $b_1$  as random parameters, is as follows:

$$h_{ij} = \left( 1.3^{b_0} + \left( H_0^{(b_0+u_i)} - 1.3^{(b_0+u_i)} \right) \frac{(1 - e^{-(b_1+v_i) \cdot d})}{(1 - e^{-(b_1+v_i) \cdot D_0})} \right)^{b_1}$$

where:

$b_0, b_1$  = Fixed parameters

$u_i, v_i$  = Random parameters

$h_{ij}$  = Height of the  $j$ th tree in the  $i$ th plot

$d_{ij}$  = DBH of the  $j$ th tree in the  $i$ th plot

sesgo absoluto y RMSE, donde las alturas observadas fueron las alturas obtenidas de parcelas de muestreo y las alturas previstas fueron obtenidas a partir del modelo calibrado de altura-diámetro para el conjunto de datos de validación.

### Resultados y discusión

#### Selección del modelo de altura-diámetro

En el Cuadro 3 se muestran las estimaciones de los parámetros con niveles de probabilidad y el estadístico de bondad de ajuste, incluyendo AIC, BIC, RMSE, sesgo absoluto y  $R^2$  para los modelos no lineales de altura-diámetro. Todos los parámetros de las estimaciones para estos modelos no lineales resultaron significativos ( $P = 0.05$ ). Los valores de RMSE variaron entre 1.79 m y 2.04 m, el sesgo absoluto entre 3.23 m y 4.18 m, y el  $R^2$  entre 0.86 m y 0.82 m en todos los modelos. Los resultados de ajuste en los modelos no lineales estudiados representaron más de 82.3 % de la varianza total en las relaciones altura-diámetro, mientras que RMSE fue inferior de 2.04 m y el sesgo absoluto fue menor de 4.18 m.

Sobre la base de las estadísticas de bondad de ajuste, el modelo de Schnute (1981) (Ecuación 9, Cuadro 3) mostró mejor capacidad de ajuste con AIC (1,068.11), BIC (1,077.73),  $R^2$  (0.86), RMSE (1.79) y el sesgo absoluto (3.23), en comparación con las otras funciones estudiadas. Por lo tanto, el modelo de Schnute (1981) fue seleccionado como el mejor modelo de altura-diámetro para utilizarse en análisis posteriores. Este modelo se utilizó para predecir la altura del árbol basándose en la altura y el diámetro dominante, con el diámetro del árbol como la variable independiente. La altura dominante y el diámetro son atributos importantes de calidad del rodal que afectan la relación entre el crecimiento en altura y diámetro, que a su vez puede ser modelada usando la regla de Eichorn (Eichorn, 1902). El uso de los índices de calidad del sitio; por ejemplo, la altura y el diámetro dominante del rodal en el modelado de las relaciones entre la altura y el diámetro, se han propuesto anteriormente

**Table 4. The goodness-of-fit statistics for different random parameters.**

**Cuadro 4. Estadística de bondad de ajuste para distintos parámetros aleatorios de la ecuación de Schnute (1981).**

Random parameters/ Parámetros aleatorios	AIC (smaller is better)/ AIC (más pequeño es mejor)	BIC (smaller is better)/ BIC (más pequeño es mejor)	$R^2$
None (all parameters as fixed effects)/Ninguno (todos los parámetros como efectos fijos)	1,068.11	1,077.71	0.86
$b_0$	761.56	768.41	0.90
$b_1$	738.49	745.13	0.90
$b_0$ and $b_1$	730.48	737.05	0.90

AIC: Akaike's information criterion, BIC: Schwarz's Bayesian Information Criterion.

AIC: Criterio de información de Akaike, BIC: Criterio de información bayesiana de Schwarz.

**Table 5. The parameter estimations and variance components with the goodness-of-fit statistics for the selected height–diameter model.**

**Cuadro 5. Parámetros estimados y componentes de varianza con la estadística de bondad de ajuste para el modelo de altura–diámetro de Schnute (1981).**

	Parameters / Parámetros	Estimate / Estimación	Standard error / Error estándar	t value / Valor t	Pr >  t
Fixed Parameters / Parámetros fijos	$b_0$	1.659	0.216	7.67	<0.0001
	$b_1$	0.051	0.009	5.58	<0.0001
Variance components of random parameters / Componentes de varianza de parámetros aleatorios	$\sigma_u^2$	0.001	0.000	3.71	0.0002
	$\sigma_v^2$	1.674	0.561	2.98	0.0031
	$\sigma_{uv}^2$	-0.036	0.010	-3.48	0.0006
	$\sigma^2$	2.215	0.114	19.34	<0.0001
Model performance / Rendimiento del modelo	$R^2$	0.906			
	RMSE	1.489			

RMSE: Root Mean Square Error. / RMSE: Raíz del cuadrado medio del error.

$H_0$  = Dominant height in the  $i$ th plot

$D_0$  = Dominant diameter in the  $i$ th plot

The estimates of fixed parameters and variance components with standard errors and probability levels for the nonlinear mixed effect in the Schnute equation, including  $b_0$  and  $b_1$  as random parameters, are given in Table 5.

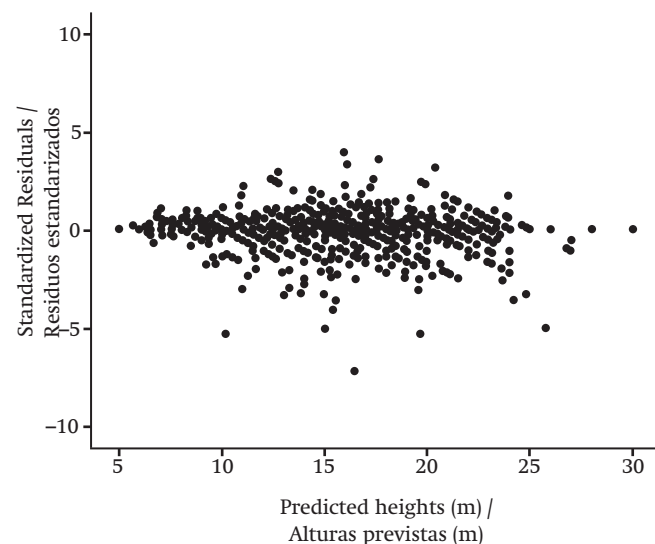
The height–diameter model based on the nonlinear mixed effect modeling approach accounted for about 90 % of the total variance in height–diameter relationships and the RMSE value of 1.48 m. Various other fit statistics for modeling the height–diameter relationships by using nonlinear mixed effect modeling were found in previous studies ( $R^2 = 0.94$  and RMSE = 1.50 m in Castedo et al., 2006;  $R^2 = 0.88$  and RMSE = 2.39 m in Crecente-Campo et al., 2010;  $R^2 = 0.82$  and RMSE = 1.37 m in Adame et al., 2008;  $R^2 = 0.82$  and RMSE = 1.15 m in Sánchez-González et al., 2007). The satisfactory predictive results from these studies and the present study suggest that modeling of the height–diameter relationships from hierarchical and clustered sample units located in different stands can be acquired using the nonlinear mixed effect modeling procedure.

The standardized residuals against predicted heights for the fixed effect nonlinear Schnute (1981) model are shown in Figure 1. In addition, the standardized residuals against predicted heights (a) and predicted heights against observed heights (b) for a nonlinear mixed effect Schnute (1981) model are shown in Figure 2. Figure 2a showed no heteroscedastic pattern in residuals. Correspondingly, White's test (White, 1980) that used  $\chi^2$  table as critical values was performed to evaluate heteroscedasticity problem and this test revealed that there is no heteroscedasticity problem in residuals (test value = 39.01,  $P > 0.05$ ). Therefore, a weighting factor with alternative transformations

(Adame et al., 2008; Crecente-Campo et al., 2010; Paulo et al., 2011; Sánchez-González, Cañellas, & Montero, 2007).

#### Modelo no lineal de efectos mixtos

En el modelo no lineal de efectos mixtos, los parámetros del modelo se deben establecer en los parámetros de efectos aleatorios o fijos en una estructura de modelo dado. En el Cuadro 4 se muestran las estadísticas de AIC y BIC que se calcularon utilizando cero (todos los parámetros son parámetros de efecto fijo), uno ( $b_0$  o  $b_1$  es un parámetro aleatorio) y dos (ambos  $b_0$  y  $b_1$  son parámetros aleatorios) parámetros de efectos



**Figure1. Standardized residuals against predicted heights for nonlinear Schnute (1981) model.**

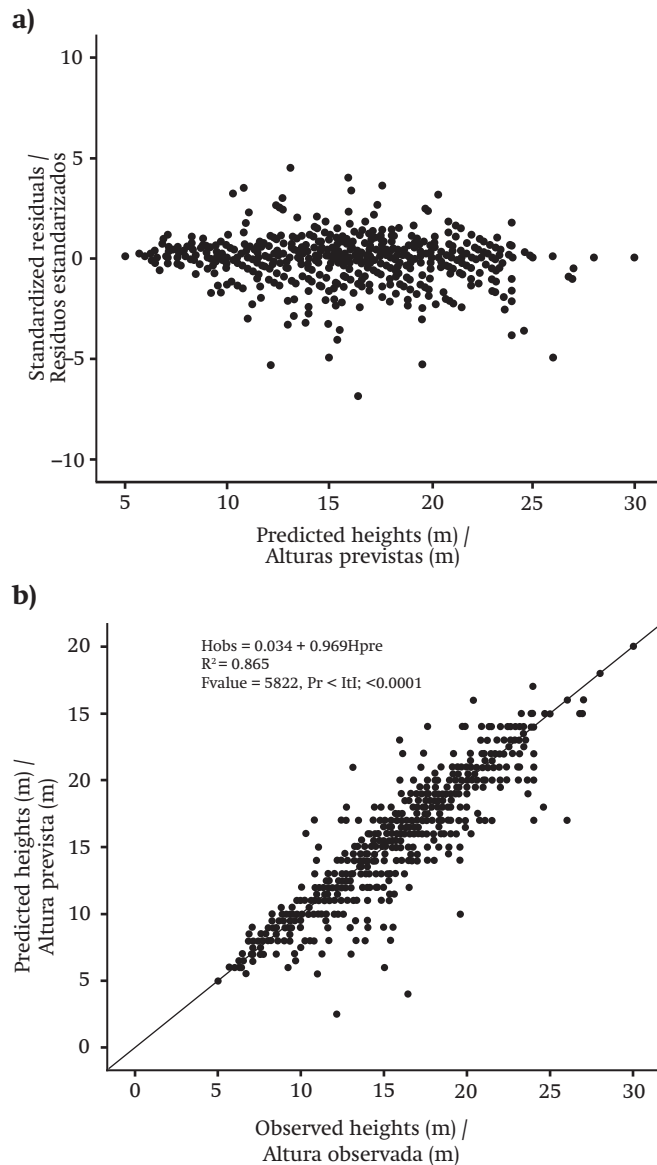
**Figura1. Residuos estandarizados contra alturas previstas en árboles de *Fagus orientalis* para el modelo no lineal de Schnute (1981).**

**Table 6. Comparison of the predictive performance for some sampling scenarios including different height sampling design and sampling sizes in *Fagus orientalis* stands.****Cuadro 6. Comparación del rendimiento predictivo para algunos escenarios de muestreo incluyendo diferente diseño de altura y tamaños de muestreo en rodales de *Fagus orientalis***

Sampling scenarios / Escenarios de muestreo	SSE	SSE reduction (%)/Reducción de SSE (%)	Absolute Bias / Sesgo absoluto	Absolute bias reduction (%) / Reducción de sesgo absoluto (%)	RMSE	RMSE reduction (%)/Reducción de RMSE (%)
Fixed effect* /Efectos fijos*	637.999		0.861		2.062	
Stand variables + height of 3 smallest trees /Variables de rodal + altura de 3 árboles más pequeños	453.821	-28.87	0.298	-65.33	1.739	-15.66
Stand variables + height of 4 smallest trees /Variables de rodal + altura de 4 árboles más pequeños	535.831	-16.01	0.656	-23.86	1.890	-8.36
Stand variables + height of 5 smallest trees /Variables de rodal + altura de 5 árboles más pequeños	480.762	-24.65	0.511	-40.70	1.790	-13.19
Stand variables + height of 3 largest trees /Variables de rodal + altura de 3 árboles más grandes	465.582	-27.02	0.179	-79.16	1.761	-14.57
Stand variables + height of 4 largest trees /Variables de rodal + altura de 4 árboles más grandes	414.153	-35.09	0.311	-63.83	1.661	-19.43
Stand variables + height of 5 largest trees /Variables de rodal + altura de 5 árboles más grandes	405.336	-36.47	0.489	-43.15	1.643	-20.29
Stand variables + height of 3 medium-size trees / Variables de rodal + altura de 3 árboles de tamaño medio	392.652	-38.46	0.147	-82.86	1.617	-21.55
Stand variables + height of 4 medium-size trees / Variables de rodal + altura de 4 árboles de tamaño medio	402.898	-36.85	0.054	-93.68	1.638	-20.53
Stand variables + height of 5 medium-size trees / Variables de rodal + altura de 5 árboles de tamaño medio	388.722	-39.07	0.042	-95.11	1.609	-21.94
Stand variables + height of 3 randomly selected trees / Variables de rodal + altura de 3 seleccionados al azar	365.244	-42.75	0.019	-97.79	1.360	-34.04
Stand variables + height of 4 randomly selected trees / Variables de rodal + altura de 4 seleccionados al azar	361.507	-43.34	0.014	-98.37	1.302	-36.85
Stand variables + height of 5 randomly selected trees / Variables de rodal + altura de 5 seleccionados al azar	380.033	-40.43	0.035	-95.86	1.391	-32.52

\*Only stand variables were measured without random parameters. SSE: Sum of square errors, RMSE: Root Mean Square Error.

\*Sólo se midieron las variables de rodal sin parámetros aleatorios. SSE: Suma de errores cuadrados, RMSE: Raíz del cuadrado medio del error.



**Figure 2. Standardized residuals against predicted heights (a) and predicted heights against observed heights for nonlinear mixed effect Schnute (1981) model (b).**

**Figura 2. Residuos estandarizados contra alturas previstas (a) y alturas previstas contra alturas observadas en árboles de *Fagus orientalis* para el modelo no lineal de efectos mixtos de Schnute (1981) (b).**

is not necessary to remove probable heteroscedastic variance error. In addition, the results of the simultaneous  $F$ -test (Figure 2b) indicate that the null-hypothesis of intercept = 0 and slope = 1 was not rejected, meaning that there were no systematic over-and underestimates in the height-diameter model. Eventually, the nonlinear mixed effect model based on the Schnute (1981) model with two random parameters provided the homoscedastic prediction variance (Figure 2).

aleatorios de Schnute (1981) (Ecuación 9, Cuadro 2). Para los parámetros aleatorios o fijos, los valores más bajos de AIC (730.48) y BIC (737.05), y el valor más alto de  $R^2$  (0.90) se obtuvieron en un modelo no lineal de efectos mixtos asumiendo dos parámetros aleatorios,  $b_0$  y  $b_1$  juntos, en la estructura del modelo. Se concluyó que el mejor modelo predictivo de altura-diámetro puede ser obtenido por el modelo no lineal de efectos mixtos en la ecuación 9 (Cuadro 2) con dos parámetros aleatorios. La expresión general de efecto mixto no lineal en la ecuación 9 (Cuadro2), incluyendo  $b_0$  y  $b_1$  como parámetros aleatorios es la siguiente:

$$h_{ij} = \left( 1.3b_0 + \left( H_0^{(b_0+u_i)} - 1.3(b_0+u_i) \right) \frac{(1 - e^{-(b_1+v_i) \cdot d})}{(1 - e^{-(b_1+v_i) \cdot D_0})} \right)^{1/2}$$

donde:

$b_0, b_1$  = Parámetros fijos

$u_i, v_i$  = Parámetros aleatorios

$h_{ij}$  = Altura del *j*ésimo árbol en la *i*ésima parcela

$d_{ij}$  = DAP del *j*ésimo árbol en la *i*ésima parcela

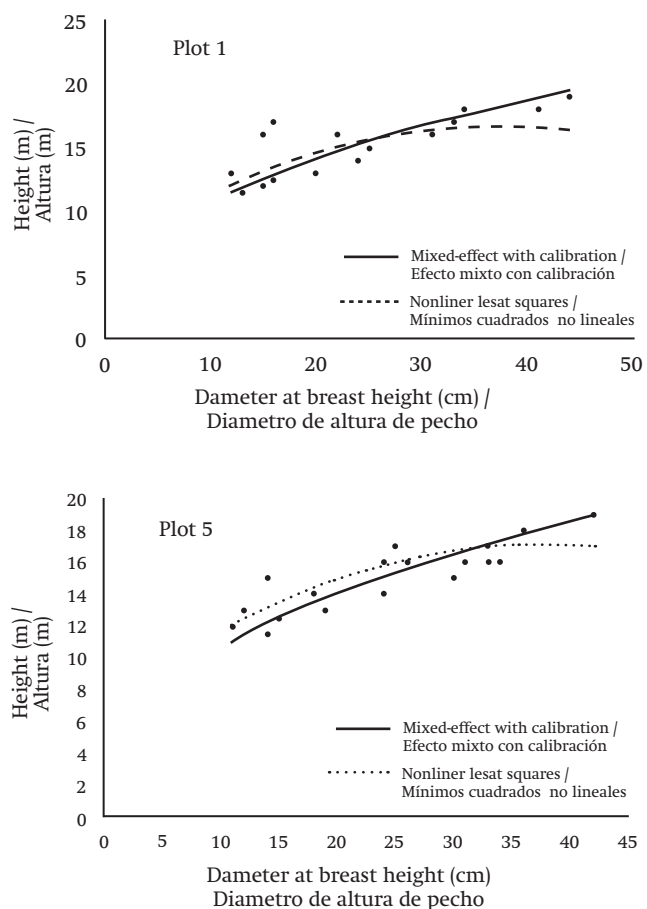
$H_0$  = Altura dominante en la *i*ésima parcela

$D_0$  = Diámetro dominante en la *i*ésima parcela

En el Cuadro 5 se muestran las estimaciones de los parámetros fijos, los componentes de varianza con error estándar y los niveles de probabilidad para el efecto mixto no lineal en la ecuación de Schnute, incluyendo  $b_0$  y  $b_1$  como parámetros aleatorios.

El modelo de altura-diámetro basado en el modelo no lineal de efectos mixtos representó alrededor de 90 % de la variación total en las relaciones de altura-diámetro; el valor de RMSE fue 1.48 m. Otras estadísticas de ajuste para modelar las relaciones de altura-diámetro mediante el modelo no lineal de efectos mixtos fueron encontrados en estudios previos ( $R^2 = 0.94$  y RMSE = 1.50 m en Castedo et al., 2006;  $R^2 = 0.88$  y RMSE = 2.39 m en Crecente-Campo et al., 2010;  $R^2 = 0.82$  y RMSE = 1.37 m en Adame et al., 2008;  $R^2 = 0.82$  y RMSE = 1.15 m en Sánchez-González et al., 2007). Los resultados satisfactorios de predicción de estos estudios y el presente estudio sugieren que el modelo de las relaciones de altura-diámetro de unidades de muestras jerárquicas y agrupadas, ubicadas en diferentes rodales, se puede adquirir mediante el procedimiento del modelo no lineal de efectos mixtos.

En la Figura 1 se muestran los residuos estandarizados contra las alturas previstas para el modelo no lineal de efectos fijos de Schnute (1981). Por otra parte, la Figura 2 presenta los residuos estandarizados contra alturas previstas (a) y alturas previstas contra alturas observadas (b) para un modelo no lineal de efectos mixtos de Schnute (1981). La Figura 2a no mostró



**Figure 3. Height–diameter predictions of the nonlinear least squared height–diameter model and the calibrated nonlinear mixed effect model with four randomly selected sub-sample trees for No. 1 and 5 sample plots.**

**Figura 3. Predicciones de altura–diámetro del modelo mínimo cuadrado no lineal de altura–diámetro y el modelo de calibración no lineal de efectos mixtos con cuatro árboles submuestras seleccionados al azar para las parcelas de muestreo 1 y 5 de *Fagus orientalis*.**

### Calibration responses in new observations

The nonlinear mixed effect height–diameter model based on Schnute (1981) (Eq. 9, Table 2) with two random parameters was validated with the validation dataset, which included 150 trees in 20 sample plots, representing about 15 % of the total data. The sum of squares of the errors (SSE), absolute bias, and RMSE values for different sub-sample alternatives, and the percentage of reduction in these values were compared to the predictions of the height–diameter model based on fixed effect parameters (Table 6). The nonlinear height–diameter mixed effect model with merely fixed effect model without any random parameters produced higher

ningún patrón heterocedástico en residuos. En consecuencia, la prueba de White (White, 1980), que utiliza la tabla de  $\chi^2$  como valor crítico, se utilizó para evaluar un problema de heterocedasticidad; la prueba reveló que no hay problema de heterocedasticidad en los residuos (valor de prueba = 39.01,  $P > 0.05$ ). Por lo tanto, un factor de ponderación con transformaciones alternativas no es necesario para eliminar el error de varianza de heterocedasticidad probable. Además, los resultados de la prueba  $F$  simultánea (Figura 2b) indican que la hipótesis nula de intercepción = 0 y pendiente = 1 no fue rechazada, lo que significa que no hubieron subestimaciones y sobrestimaciones sistemáticas en el modelo de altura–diámetro. Finalmente, el modelo no lineal de efectos mixtos basado en el modelo de Schnute (1981) con dos parámetros aleatorios proporcionó la predicción de la varianza de homocedasticidad (Figura 2).

### Respuestas de calibración en nuevas observaciones

El modelo no lineal de efectos mixtos de altura–diámetro basado en el modelo de Schnute (1981) (Ecuación 9, Cuadro 2) con dos parámetros aleatorios fue validado con el conjunto de datos de validación que incluye 150 árboles en 20 parcelas de muestreo, lo que representa aproximadamente 15 % de los datos totales. SSE, el sesgo absoluto, los valores RMSE para las distintas alternativas de submuestra y el porcentaje de reducción de estos valores se compararon con las predicciones del modelo de altura–diámetro con basado en los parámetros de efectos fijos (Cuadro 6). El modelo no lineal de efectos mixtos de altura–diámetro con únicamente el modelo de efectos fijo sin parámetros aleatorios produjo los valores más altos de SSE (637.99), sesgo absoluto (0.86) y RMSE (2.06) en comparación con los modelos que implican parámetros aleatorios.

El protocolo de calibración basado en cuatro árboles submuestra, seleccionados aleatoriamente en una parcela de muestreo, dio los mejores resultados predictivos con 43.34 % de reducción de SSE, 98.37 % de reducción de sesgo absoluto y 36.85 % de reducción de RMSE en comparación con las predicciones de efectos fijos. El mejor rendimiento predictivo posterior para la calibración se obtuvo utilizando escenarios de muestreo basado en la selección de tres a cinco árboles submuestras de tamaño mediano en parcelas de muestreo. El procedimiento de calibración, incluyendo cinco árboles de tamaño mediano en una parcela de muestreo, alcanzó la reducción de 39.1 %, 95.1 %, 21.9 % en los valores para SSE, sesgo absoluto y RMSE, respectivamente. Sin embargo, las alternativas de submuestreo que seleccionaron los árboles más pequeños y los más grandes dieron los resultados predictivos más pobres y los valores más altos de SSE, sesgo absoluto y RMSE (Cuadro 6).

Los modelos calibrados de altura–diámetro mejoraron

values for SSE (637.99), absolute bias (0.86) and RMSE (2.06) than the models involving random parameters.

The calibration protocol based on four randomly selected sub-sample trees in a sample plot gave the best predictive results, with 43.34 % reduction of SSE, 98.37 % reduction of absolute bias, and 36.85 % reduction of RMSE as compared to the fixed effect predictions. The subsequent better predictive performance for calibration was obtained using sampling scenarios based on selection of three to five medium size sub-sample trees in sample plots. The calibration procedure, including five medium-size trees in a sample plot, achieved 39.1 %, 95.1 %, and 21.9 % reduction in values for SSE, absolute bias, and RMSE, respectively. However, the sub-sampling alternatives that selected the smallest and the largest trees gave the poorest predictive results and higher values of SSE, absolute bias, and RMSE (Table 6).

The calibrated height-diameter models further improved the height predictions by applying the sub-sampling scenarios such as the selection of randomly chosen three to five sub-sample trees in the plots. Calama and Montero (2004) and Adame et al. (2008) proposed the use of randomly selected height measurements for calibration of height-diameter models. However, other studies (Castedo et al., 2006; Crecente-Campo et al., 2010; Paulo et al., 2011) found that the best predictive results for calibration response were obtained by selecting the smallest trees in sample plots. Thus, different sub-sampling scenarios may be successful in calibrating height-diameter models. Attributes, such as the largest, medium-size, or the smallest tree measurements, when randomly chosen among sample plots, may provide additional information and give a successful predictive performance (Castedo et al., 2006). In this regard, the calibration responses for a given mixed-effect model depend on the model structure and characteristics of a species growing in different regional and local forest conditions. Certain sampling scenarios with different sub-sample selection will provide better information for calibration response than other sampling alternatives at various forest sites and for various tree species.

The graphical representation of the height trends in the nonlinear least squared model and the calibrated nonlinear mixed effect height-diameter models based on four randomly selected sub-sample trees from validation data set are given in two plots, plot No. 1 and No. 5, (Figure 3). The height predictions of the nonlinear least squared model in these two sample plots were obtained using the parameters of nonlinear height-diameter model, Eq. 9, given in Table 3. However, the height predictions of the nonlinear mixed effect models were achieved using the calibrated model based on four randomly selected sub-sample trees in these plots. The nonlinear least

aún más las predicciones de altura mediante la aplicación de escenarios de submuestreo tales como la selección de tres a cinco árboles submuestra en parcelas elegidos al azar. Calama y Montero (2004) y Adame et al. (2008) propusieron el uso de mediciones de altura seleccionadas al azar para los modelos de calibración de altura-diámetro. Sin embargo, en otros estudios (Castedo et al., 2006; Crecente-Campo et al., 2010; Paulo et al., 2011) se encontró que los mejores resultados predictivos de respuesta de calibración se obtuvieron mediante la selección de los árboles más pequeños en parcelas de muestreo. Por lo tanto, los diferentes escenarios de submuestreo pueden tener éxito en los modelos de calibración de altura-diámetro. Los atributos, como la mediciones de los árboles más grandes, medianos o los más pequeños, cuando se eligen al azar entre las parcelas de muestreo, pueden proporcionar información adicional y dar un rendimiento predictivo de éxito (Castedo et al., 2006). En este sentido, las respuestas de calibración para un modelo de efectos mixtos determinado dependen de la estructura del modelo y las características de una especie de crecimiento en diferentes condiciones forestales regionales y locales. Ciertos escenarios de muestreo con diferente selección submuestra proporcionarán mejor información para la respuesta de calibración que otras alternativas de muestreo en varios sitios forestales y para diversas especies de árboles.

La representación gráfica de las tendencias de altura en el modelo de mínimos cuadrados no lineales y los modelos de calibración no lineales de efectos mixtos de altura-diámetro, con base en cuatro árboles submuestras seleccionados al azar de un conjunto de datos de validación, se dan en dos parcelas (parcela 1 y 5) (Figura 3). Las predicciones del modelo de mínimos cuadrados no lineales en estas dos parcelas de muestreo se obtuvieron utilizando los parámetros del modelo no lineal de altura-diámetro (Ecuación 9, Cuadro 3). Sin embargo, las predicciones de altura de los modelos no lineales de efectos mixtos se lograron mediante el modelo de calibración basado en cuatro árboles submuestras seleccionados al azar en estas parcelas. El modelo de mínimos cuadrados no lineales de altura-diámetro presentó mayor varianza residual con las predicciones sesgadas, mientras que el modelo de calibración no lineal de efectos mixtos produce predicciones de altura que son consistentes con los valores observados en estas parcelas (Figura 3).

La función de Schnute (1981) ha sido utilizada con éxito para modelar las relaciones altura-diámetro en otros estudios (Castedo et al., 2006; Huang et al., 1992; Lei & Parresol, 2001; Lei & Zhang, 2006; Zhang, 1997). Schnute desarrolló inicialmente su ecuación de crecimiento para la investigación pesquera (Lei & Zhang, 2006) y más tarde se demostró que esta función puede producir tendencias de crecimiento más flexibles para describir

squared height–diameter model presented larger residual variance with biased predictions, whereas the calibrated nonlinear mixed effect model produces height predictions that are consistent with observed values in these plots (Figure 3).

The Schnute (1981) function has been used successfully to model height–diameter relationships in other studies (Castedo et al., 2006; Huang et al., 1992; Lei & Parresol, 2001; Lei & Zhang, 2006; Zhang, 1997). Schnute initially developed his growth equation for fishery research (Lei & Zhang, 2006), and later it was shown that this function can produce the most flexible growth trends for describing height–diameter relationships with quickly fitting convergence (Bredenkampn & Gregoire, 1988; Lei & Parresol, 2001). This function includes two parameters that differentiate between curve shapes (S-shaped or concave-shaped curves),  $b_0$  and  $b_1$ , and its upper asymptotic values represent the height growth potential.

As a desirable attribute of this function, Eq. 9, Schnute's (1981) height–diameter model predicts tree height to be 1.3 m, if diameter at breast equals zero ( $d^{1.30} = 0$ ). These attributes of height–diameter models were previously explained by Paulo et al. (2011) and Sánchez-González et al. (2007). The height–diameter prediction model based on Schnute (1981) can produce appropriate height predictions in the biological growth trend of Oriental beech trees in studied stands.

## Conclusions

In this study, various nonlinear growth models were developed and evaluated to quantify the relationships between height and diameter of trees. Among the studied models, Schnute's growth model with dominant height and diameter variables as stand parameters provided the best predictive results. Additionally, the nonlinear mixed effect modeling procedure in the Schnute's model was used to simultaneously estimate fixed and random parameters in a model structure. The nonlinear mixed effect modeling procedure improved predictive results in Height-Dbh relationships as compared with fixed effect models. Schnute's height–diameter model that was developed in this study is suitable for forest inventories using height and diameter measurements from three to five randomly selected trees per plot. It produces unbiased predictions using the calibrated model in specific sample plots. This model will help forest planners and silviculturists to obtain tree height predictions in Oriental beech stands. In this study, we emphasized the ability of nonlinear mixed effect modeling for predicting the relationships between height and diameter in Oriental beech (*Fagus orientalis* Lipsky) stands. The height–diameter models may present an important tool in forest management planning and site quality evaluations of these studied stands located in Turkey.

las relaciones de altura-diámetro con ajuste rápido de convergencia (Bredenkampn & Gregoire, 1988; Lei & Parresol, 2001). Esta función incluye los parámetros  $b_0$  y  $b_1$  que diferencian entre formas de curva (en forma de S o en forma cóncava), y sus valores asintóticos superiores representan el potencial de crecimiento en altura.

Como un atributo deseable de esta función, la ecuación 9 del modelo de Schnute (1981) de altura-diámetro predice la altura del árbol a 1.30 m, si el diámetro del pecho es igual a cero ( $d^{1.30} = 0$ ). Estos atributos de los modelos de altura-diámetro fueron explicados anteriormente por Paulo et al. (2011) y Sánchez-González et al. (2007). El modelo de predicción de altura-diámetro basado en Schnute (1981) puede producir predicciones apropiadas de altura en la tendencia de crecimiento biológico de hayas orientales en los rodales estudiados.

## Conclusiones

En este estudio, varios modelos de crecimiento no lineales se desarrollaron y evaluaron para cuantificar las relaciones entre la altura y el diámetro de los árboles. Entre los modelos estudiados, el modelo de crecimiento de Schnute con variables de altura y diámetro dominantes, como parámetros de rodal, proporciona los mejores resultados predictivos. El procedimiento del modelo no lineal de efectos mixtos se utilizó en el modelo de Schnute para estimar simultáneamente los parámetros fijos y aleatorios en una estructura de modelo. El procedimiento del modelo no lineal de efectos mixtos mejoró resultados predictivos en las relaciones altura-DAP en comparación con los modelos de efectos fijos. El modelo de altura-diámetro de Schnute es adecuado para inventarios forestales utilizando mediciones de altura y diámetro de tres a cinco árboles seleccionados al azar por parcela. Se producen predicciones imparciales utilizando el modelo de calibración en parcelas de muestreo específicos. Este modelo ayudará a los planificadores y los silvicultores a obtener predicciones de la altura del árbol en rodales de hayas orientales. En este estudio, destacamos la capacidad del modelo no lineal de efectos mixtos para predecir las relaciones entre altura y diámetro en rodales de *F. orientalis*. Los modelos de altura-diámetro pueden representar una herramienta importante en la planificación del manejo forestal y las evaluaciones de calidad de sitio de los rodales estudiados y ubicados en Turquía.

## Agradecimientos

Los autores agradecen al Jefe del Departamento de Gestión y Planificación Forestal y a la Dirección General de Silvicultura de la República de Turquía por proporcionar los datos del estudio.

*Fin de la versión en español*



## Acknowledgements

The authors would like to thank the Head of the Forest Management and Planning Department, General Directorate of Forestry, Republic of Turkey, for providing study data.

### End of English version

## References / Referencias

- Adame, P., del Río, M., & Cañellas, I. (2008). A mixed nonlinear height-diameter model for pyrenean oak (*Quercus pyrenaica* Willd.). *Forest Ecology and Management*, 256, 88–98. doi: 10.1016/j.foreco.2008.04.006
- Bredenkamp, B. V., & Gregoire, T. G. (1988). A forestry application of Schnute's generalized growth function. *Forest Science*, 34, 790–797.
- Budhathoki, C. B., Lynch, T. B., & Guldin, J. M. (2008). A mixed-effects model for dbh-height relationship of shortleaf pine (*Pinus echinata* Mill.). *South Journal of Applied Forest*, 32, 5–11. Obtenido de <http://www.srs.fs.usda.gov/pubs/31430>
- Calama, R., & Montero, G. (2004). Interregional nonlinear height-diameter model with random coefficients for stone pine in Spain. *Canadian Journal of Forest Research*, 34, 150–163. doi: 10.1139/X03-199
- Castedo, D., F., Diéguez-Aranda, U., Barrio, M., Sánchez, M., & von Gadow, K. (2006). A generalized height-diameter model including random components for radiata pine plantations in northeastern Spain. *Forest Ecology and Management*, 229, 202–213. doi: 10.1016/j.foreco.2006.04.028
- Crecente-Campo, F., Tomé, M., Soares, P., & Diéguez-Aranda, U. (2010). A generalized nonlinear mixed-effects height-diameter model for *Eucalyptus globulus* L. in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management*, 259, 943–952. doi: 10.1016/j.foreco.2009.11.036
- Eichhorn, F. (1902). *Ertragstafeln für die Weißtanne*. Berlin, Germany: Verlag Julius Springer.
- Gregoire, T. G. (1987). Generalized error structure for forestry yield models. *Forest Science*, 33, 423–444.
- Huang, S., Titus, S. J., & Wiens, D. P. (1992). Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research*, 22, 1297–1304. Obtenido de <http://www.math.ualberta.ca/~wiens/home%20page/pubs/treemodels.pdf>
- Huang, S., Price, D., & Titus, S. J. (2000). Development of ecoregion-based height-diameter models for white spruce in boreal forests. *Forest Ecology and Management*, 129, 125–141. doi: 10.1016/S0378-1127(99)00151-6
- Huang, S., Meng, S. X., & Yang, Y. (2009). Using nonlinear mixed model technique to determine the optimal tree height prediction model for black spruce. *Modern Applied Science*, 3, 3–18. Obtenido de <http://ccsenet.org/journal/index.php/mas/article/view/1240>
- Hui, G. Y., & von Gadow, K. (1993). Zur entwicklung von einheitshöhenkurven am beispiel der baumartcunninghamia lanceolata. *Allg Forst Jagdztg*, 164, 218–220.
- Laar, A., & Akça, A. (1997). *Forest mensuration*. Göttingen, Germany: Cuvillier Verlag.
- Lappi, J. (1991). Calibration of height and volume equations with random parameters. *Forest Science*, 37, 781–801.
- Lappi, J. (1997). A longitudinal analysis of height/diameter curves. *Forest Science*, 43, 555–570.
- Lei, Y., & Parresol, B. R. (2001). Remarks on height-diameter modeling. USA: Southern Research Station, U.S. Department of Agriculture, Forest Service. Obtenido de [http://www.srs.fs.fed.us/pubs/rn/rn\\_srs010.pdf](http://www.srs.fs.fed.us/pubs/rn/rn_srs010.pdf)
- Lei, Y., & Zhang, S. Y. (2006). Comparison and selection of growth models using the Schnute model. *Journal of Forest Science*, 52, 188–196. Obtenido de <http://www.agriculturejournals.cz/publicFiles/55095.pdf>
- Loetsch, F., Zöher, F., & Haller, K. (1973). *Forest inventory*. München: BLV.
- Lynch, T. B., Hitch, K. L., Huebschmann, M. M., & Murphy, P. A. (1999). An individual tree growth and yield prediction system for even-aged natural shortleaf pine forests. *South Journal of Applied Forest*, 23, 203–211. Obtenido de <http://www.srs.fs.usda.gov/pubs/1939>
- Martin, F. C., & Flewelling, J. W. (1998). Evaluation of tree height prediction models for stand inventory. *Western Journal of Applied Forest*, 13, 109–119.
- Mehtätalo, L. (2004). A longitudinal height-diameter model for Norway spruce in Finland. *Canadian Journal of Forest Research*, 34, 131–140. doi: 10.1139/x03-207
- Meyer, H. A. (1940). A mathematical expression for height curves. *Journal of Forest*, 38, 415–420.
- Nanos, N., Calama, R., Montero, G., & Gil, L. (2004). Geostatistical prediction of height/diameter models. *Forest Ecology and Management*, 195, 221–235. doi: 10.1016/j.foreco.2004.02.031
- Paulo, J. A., Tomé, J., & Tomé, M. (2011). Nonlinear fixed and random generalized height-diameter models for Portuguese cork oak stands. *Annals of Forest Science*, 68, 295–309. doi: 10.1007/s13595-011-0041-y
- Pinheiro, J. C., & Bates, D. M. (2000). *Mixed effects models in S and S-Plus*. New York, USA: Springer-Verlag.
- Prodan, M. (1965). *Holzmesslehre*. Frankfurt, Germany: Saurländers Verlag.
- Richards, F. J. A. (1959). Flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, 10, 290–300. doi: 10.1093/jxb/10.2.290
- Statistical Analysis System (SAS Institute). (2004). *SAS/STAT 9.1 User's Guide: Statistics, version 9.1*. Cary, NC, USA: Autor.
- Sánchez-González, M., Cañellas, I., & Montero, G. (2007). Generalized height-diameter and crown diameter prediction models for cork oak forests in Spain.

- Investigación Agraria: Sistemas y Recursos Forestales*, 16, 76–88. Obtenido de [http://www.inia.es/gcontrec/pub/076-088-%285706%29-Generalized\\_1175075895515.pdf](http://www.inia.es/gcontrec/pub/076-088-%285706%29-Generalized_1175075895515.pdf)
- Schmidt, M., Kiviste, A., & von Gadow, K. A. (2010). A spatially explicit height–diameter model for Scots pine in Estonia. *European Journal of Forest Research*, 23, 1–13. doi: 10.1007/s10342-010-0434-8
- Schnute, J. (1981). A versatile growth model with statistically stable parameters. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 38, 1128–1140. doi: 10.1139/f81-153
- Searle, S. R., Casella, G., & McCulloch, C. E. (1992). *Variance components*. USA: Wiley.
- Sharma, M., & Parton, J. (2007). Height–diameter equations for boreal tree species in Ontario using a mixed-effects modeling approach. *Forest Ecology and Management*, 249, 187–198. doi: 10.1016/j.foreco.2007.05.006
- Soares, P., & Tomé, M. (2002). Height–diameter equation for first rotation eucalypt plantations in Portugal. *Forest Ecology and Management*, 166, 99–109. doi: 10.1016/S0378-1127(01)00674-0
- West, P. W., Ratkowsky, D. A., & Davis, A. W. (1984). Problems of hypothesis testing of regressions with multiple measurements from individual sampling units. *Forest Ecology and Management*, 7, 207–224. doi: 10.1016/0378-1127(84)90068-9
- White, H. (1980). A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, 48, 817–838. Obtenido de [http://www.aae.wisc.edu/aae637/handouts/whites\\_hetero\\_estimator.pdf](http://www.aae.wisc.edu/aae637/handouts/whites_hetero_estimator.pdf)
- Zhang, L. (1997). Cross-validation of non-linear growth functions for modelling tree height–diameter relationships. *Annals of Botany*, 79, 251–257. doi: 10.1006/anbo.1996.0334