

# Characterization of diameter structures of natural forests of northwest of Durango, Mexico

Caracterización de las estructuras diamétricas de los bosques naturales del noroeste de Durango, México

Sacramento Corral-Rivas<sup>1</sup>; Juan G. Álvarez-González<sup>2</sup>; José J. Corral-Rivas<sup>3</sup>; Carlos A. López-Sánchez<sup>3\*</sup>.

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico de El Salto. Mesa del Tecnológico s/n. C. P. 34950. El Salto, Pueblo Nuevo, Durango. MÉXICO.

<sup>2</sup>Departamento de Enxeñería Agroforestal, Universidad de Santiago de Compostela. Escuela Politécnica Superior - R/ Benigno Ledo, Campus universitario 27002. Lugo. ESPAÑA.

<sup>3</sup>Instituto de Silvicultura e Industria de la Madera. Universidad Juárez del Estado de Durango. Boulevard del Guadiana 501, fracc. Ciudad Universitaria. C. P. 34120. Durango, MÉXICO.  
Correo-e: calopez@ujed.mx Tel.: +52 618 8251886 (\*Autor para correspondencia).

## Abstract

The diameter distribution of 44 permanent plots (conifers and broadleaf trees) was modeled using the three-parameter Weibull and Johnson's  $S_B$  probability density functions (PDFs) in Santiago Papasquiario, Durango. Four different methods of fitting parameters were used: maximum likelihood (ML), moments (MM), non-linear regression by ordinary least squares (ONLS) and percentiles (MP). The best method of fitting parameters for conifers and broadleaf trees was the method of moments. In modeling the Weibull PDFs, it was assumed that the location parameter ( $\epsilon$ ) corresponds to the minimum measurable diameter. The scale parameter ( $\lambda$ ) was modeled using the method of prediction parameter (PPM) through a linear regression relating to the quadratic mean diameter and dominant height of the stand. Finally, the shape parameter ( $\gamma$ ) was indirectly recovered by the method of moments through prediction of the average diameter of the stand. According to the Kolmogorov-Smirnov test ( $P=0.05$ ), 71 % of the plots for the group of conifers and 68 % of the plots for the group of broadleaf species come from a population that follows the fitting distribution function.

**Keywords:** Conifers, broadleaf trees, Weibull function, diameter distribution modeling.

## Resumen

La distribución diamétrica de 44 parcelas permanentes (coníferas y latifoliadas) se modeló a través de las funciones de densidad de probabilidad (FDP) Weibull de tres parámetros y  $S_B$  Johnson, en el municipio de Santiago Papasquiario, Durango. Para ello, se emplearon cuatro métodos de ajuste de parámetros: máxima verosimilitud, momentos, regresión no lineal por mínimos cuadrados ordinarios y percentiles. El mejor método de ajuste para las especies de coníferas y latifoliadas fue el método de momentos. En el modelado de la FDP Weibull se asumió que el parámetro de localización ( $\epsilon$ ) corresponde al diámetro mínimo inventariable de la distribución. El parámetro de escala ( $\lambda$ ) se modeló con el procedimiento de predicción de parámetros a través de un modelo de regresión lineal simple que relaciona  $\gamma$  con el diámetro cuadrático medio y la altura dominante del rodal. Finalmente, el parámetro de forma ( $\gamma$ ) fue recuperado indirectamente por el método de momentos a través de la predicción del diámetro medio del rodal. De acuerdo con la prueba de Kolmogorov-Smirnov ( $P=0.05$ ), 71 % de las parcelas del grupo de especies de coníferas y 68 % de las parcelas del grupo de latifoliadas provienen de una población que sigue la función de distribución ajustada.

**Palabras clave:** Coníferas, latifoliadas, función Weibull, modelado diamétrico.

Please cite this article as follows (APA 6): Corral-Rivas, S., Álvarez-González, J. G., Corral-Rivas, J. J., & López-Sánchez, C. A. (2015). Characterization of diameter structures of natural forests of northwest of Durango, Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 21(2), 221-236. doi: 10.5154/r.rchscfa.2014.10.046

Received: October 14, 2014 / Accepted: June 29, 2015.



www.chapingo.mx/revistas/forestales

## Introduction

Most forests in Durango share a mixture of *Pinus* and *Quercus* species, showing semiregular or irregular diameter distributions with trees of great variety of diameters and often with two or more layers. These forests are considered the first forest reserve in the country, covering 5.4 million hectares and bringing about a quarter of the national forest production in Mexico (Secretaría de Recursos Naturales y Medio Ambiente [SRNyMA], 2006). According to González-Elizondo, González and Márquez (2007), Durango has recorded 21 species of *Pinus*, representing approximately 20 % of the existing pine species in the world, and 43 species of *Quercus*. Besides these two genus we found *Cupressus*, *Juniperus*, *Arbutus* and *Alnus* species (Wehenkel, Corral-Rivas, Hernández-Díaz, & Gadow, 2011).

In forest management, decision making are often based primarily on the growth and yield of a stand (Parresol, 2003), variables whose prediction has been the subject of constant study. The knowledge of the diameter distribution of a stand is an essential tool for decision making in forest management (Cao, 2004; Zhang, Packard, & Liu, 2003), and is one of the main characteristics for determining variables of state, such as basal area, volume and biomass per unit area (Mehtätalo, 2004). Furthermore, when the number of trees in each diameter class is analyzed at the level of species or groups of species, the relationship between number of trees and dimensions indicating reproductive capacity and the number of trees of the lower classes (regenerated) can provide information on strategies for inter- and intraspecific regeneration and on the future trend regarding the evolution of the population (Wright, Muller-Landau, Condit, & Hubbell, 2003).

In the literature there is large number of probability density functions (PDFs) used to describe the diameter distribution of a stand, being the Weibull and Johnson's  $S_B$  PDFs, two of the most commonly used. Bailey and Dell (1973) pioneers in the use of the Weibull PDFs to describe the diameter distribution of forest stands under traditional forestry, while Hafley and Schreuder (1977) introduced the Johnson's  $S_B$  distribution (*System bounded* [Johnson, 1949]) for the characterization of diameter distributions. The purpose of modeling precisely the diameter distribution is to create a system that provides estimates of volume per diameter class and per unit area (Cao, 2004; Jiang & Brooks, 2009; Parresol, 2003). Thus, the problem is the need to accurately predict the FDP parameters that determine the diameter distribution at a specific point in time. When the actual diameter distribution of a stand is known, there are several methods for estimating the parameters of a density function: i) the maximum likelihood method that have several solution procedures

## Introducción

La mayor parte de los bosques del estado de Durango comparten una mezcla de especies de los géneros *Pinus* y *Quercus*, presentando distribuciones semirregulares o irregulares con árboles de gran variedad de diámetros y, a menudo, en dos o más estratos. Estos bosques se consideran la primera reserva forestal del país, cubriendo 5.4 millones de hectáreas y aportando cerca de una cuarta parte de la producción forestal nacional en México (Secretaría de Recursos Naturales y Medio Ambiente [SRNyMA], 2006). De acuerdo con González-Elizondo, González, y Márquez (2007), en Durango se han registrado 21 especies del género *Pinus*, representando aproximadamente 20 % de las especies de pino existentes en el mundo, y 43 especies del género *Quercus*. Además de estos dos géneros se encuentran también especies de *Cupressus*, *Juniperus*, *Arbutus* y *Alnus* (Wehenkel, Corral-Rivas, Hernández-Díaz, & Gadow, 2011).

En el ámbito forestal, la toma de decisiones a menudo se basa principalmente en el crecimiento y rendimiento de un rodal (Parresol, 2003), variables cuya predicción ha sido motivo de estudio constante. El conocimiento de la distribución diamétrica de un rodal constituye una herramienta fundamental para la toma de decisiones en el manejo forestal (Cao, 2004; Zhang, Packard, & Liu, 2003) y es una de las características principales para la determinación de variables de estado del rodal, tales como área basal, volumen y biomasa por unidad de superficie (Mehtätalo, 2004). Además, cuando el número de árboles en cada clase diamétrica se analiza a escala de especie o grupos de especies, la relación entre el número de árboles con dimensiones que indiquen capacidad reproductiva y el número de árboles de las clases inferiores (regenerado) puede aportar información sobre las estrategias de regeneración inter e intraespecíficas y sobre la tendencia futura de la población (Wright, Muller-Landau, Condit, & Hubbell, 2003).

En la literatura existe gran número de funciones de densidad de probabilidad (FDP) usadas para describir la distribución diamétrica de un rodal, siendo las FDP de Weibull y  $S_B$  Johnson, dos de las más utilizadas. Bailey y Dell (1973) fueron pioneros en usar la FDP Weibull para describir la distribución diamétrica de rodales bajo silvicultura tradicional, mientras que Hafley y Schreuder (1977) introdujeron la distribución de Johnson  $S_B$  (*System bounded* [Johnson, 1949]) para la caracterización de distribuciones diamétricas. El propósito de modelar la distribución diamétrica con precisión es generar un sistema que provea estimaciones de volumen por clase diamétrica y por unidad de superficie (Cao, 2004; Jiang & Brooks, 2009; Parresol, 2003). Así, el problema radica en la necesidad de predecir con precisión los parámetros de la FDP que determinan la distribución diamétrica en un momento específico del tiempo. Cuando la distribución diamétrica real de un rodal se conoce, existen varios

(Rennolls, Geary, & Rollison, 1985); ii) the estimation based on different percentiles of the distribution (Bailey & Dell, 1973; Shiver, 1988); iii) the estimation obtained by nonlinear regression by using iterative procedures, and iv) methods based on values of specific moments of the diameter distribution (Shifley & Lentz, 1985). If the aim is to project the density function when the actual number of trees is not known in each diameter class, the methodologies to be used differ from the above and can be classified into one of the following two groups (Hyink & Moser, 1983): i) parameter estimation methods, and ii) recovery parameter methods. The parameter estimation methodology consists in establishing relationships between different variables of the stand and parameters of the function density fitted to each plot (Schreuder, Hafley, & Bennet, 1979; Smalley & Bailey, 1974). Meanwhile, the parameter recovery method is based on relating stand variables (mainly basal area, dominant height and number of trees per hectare) with percentiles (Cao & Burkhart, 1984) or with moments (Burk & Newberry, 1984; Newby, 1980) of the diameter distribution. The relationships established are used later to recover the parameters of the distribution or density function. In both methods, the value of the stand variables can be obtained at any time from an inventory or from a growth model.

In Mexico, the FDPs have been used in studies developed for a single species plantations using the Weibull PDFs (Maldonado-Ayala & Návar, 2002; Torres-Rojo, Acosta-Mireles, & Magaña-Torres, 1992). However, the reported studies to describe and model the diameter structures of mixed and uneven-aged stands in natural forests in a given time are few and they are limited to compare fitting methodologies (Návar & Contreras, 2000). Thus, the objectives of this study were: i) characterize diameter distributions of species of conifers and broadleaf trees in mixed and uneven-aged forests of northwestern Durango; ii) estimate diameter distributions by means of the best fitting methodology and the Weibull and Johnson's  $S_B$  PDF; and iii) determine the best methodology to model the theoretical function selected to estimate the diameter distribution of the tree at any age.

## Materials and methods

### Study area

The study area is located in the northwestern region of Durango, Mexico; in particular, this study was performed in the ejido San Diego Tezains, municipality of Santiago Papasquiaro, geographically located at coordinates 105° 53' 36" -106° 12' 40" W and 24° 48' 16" -25° 13' 32" N. The predominant type of vegetation is pine-oak forests. The height above sea level varies from 1,400 to 3,000 m. The climate is temperate semi cold with a regimen of annual precipitation ranging

métodos para estimar los parámetros de una función de densidad: i) los estimadores de máxima verosimilitud que cuentan con varios procedimientos de solución (Rennolls, Geary, & Rollison, 1985); ii) los estimadores basados en diversos percentiles de la distribución (Bailey & Dell, 1973; Shiver, 1988); iii) los estimadores obtenidos por regresión no lineal mediante el empleo de procedimientos iterativos, y iv) los métodos basados en los valores de determinados momentos de la distribución diamétrica (Shifley & Lentz, 1985). Si el objetivo es proyectar la función de densidad cuando no se conoce el número real de árboles en cada clase diamétrica, las metodologías a emplear difieren de las anteriores y se pueden clasificar en alguno de estos dos grupos (Hyink & Moser, 1983): i) métodos de estimación de parámetros y ii) métodos de recuperación de parámetros. La metodología de estimación de parámetros consiste en establecer relaciones entre distintas variables del rodal y los parámetros de la función de densidad ajustada a cada parcela (Schreuder, Hafley, & Bennet, 1979; Smalley & Bailey, 1974). Por su parte, el método de recuperación de parámetros se basa en relacionar variables del rodal (fundamentalmente el área basal, altura dominante y número de árboles por hectárea) con percentiles (Cao & Burkhart, 1984) o con momentos (Burk & Newberry, 1984; Newby, 1980) de la distribución diamétrica. Las relaciones establecidas se utilizan posteriormente para recuperar los parámetros de la función de distribución o de densidad. En ambas metodologías, el valor de las variables del rodal puede obtenerse en cualquier instante a partir de un inventario o de un modelo de crecimiento.

En México, las FDP se han aplicado en trabajos desarrollados para plantaciones con una sola especie usando la FDP Weibull (Maldonado-Ayala & Návar, 2002; Torres-Rojo, Acosta-Mireles, & Magaña-Torres, 1992). No obstante, los estudios reportados para describir y modelar las estructuras diamétricas de las masas mixtas e irregulares en bosques naturales en un tiempo determinado son pocos y se limitan a comparar las metodologías de ajuste (Návar & Contreras, 2000). De esta forma, los objetivos del presente trabajo fueron: i) caracterizar las distribuciones diamétricas de las especies de coníferas y latifoliadas en los bosques mixtos e irregulares del noroeste de Durango; ii) reconstruir las distribuciones diamétricas mediante la mejor metodología de ajuste de las FDP Weibull y  $S_B$  Johnson; y iii) determinar la mejor metodología para modelar la función teórica seleccionada para reconstruir la distribución diamétrica de la masa a cualquier edad.

## Materiales y métodos

### Área de estudio

El área de estudio se localiza en la región noroeste del estado de Durango, México; concretamente, el trabajo se realizó en el ejido San Diego de Tezains, municipio

from 800 to 1,100 mm, and mean annual temperature ranging from 8 °C on the highest areas to 24 °C in the lowest areas (García, 1981).

## Data

The data used came from 44 permanent sample plots placed for monitoring growth and production of forests of the ejido San Diego de Tezains and surrounding areas. Plots were established between 2008 and 2009 according to the methodology proposed by Corral-Rivas et al. (2009), trying to cover all types of vegetation, site quality and diameter distributions present in the stands under forest management. The plots are quadrangular (50 x 50 m) and are distributed under a systematic sampling grid (with equidistant points of 5 km); it is intended to remeasure at intervals of five years. The variables recorded in the trees with a breast height diameter (measured at 1.3 meters above ground), equal or greater than 7.5 cm were: tree species, diameter at breast height (d, with two cross measurements in mm), total tree height (h in cm), stem height (m), azimuth (°) and radius (m) from the center of the plot (intersection of the two diagonals). In each plot were recorded also variables of physiographic information and soil resource such as slope, aspect, soil depth, presence of erosion, thickness layers of organic matter and pine and oak leaves known in Mexico as *ocochal*.

In the database 27 species of conifers and broadleaf trees were identified for further analysis. Conifers studied belong to the genera *Cupressus*, *Juniperus*, *Pinus* and *Pseudotsuga* (*Cupressus lusitanica* Mill., *Juniperus deppeana* Steud., *J. durangensis* Martínez, *Pinus arizonica* Engelm, *P. strobiformis* Engelm, *P. durangensis* Martínez, *P. engelmannii* Carr., *P. leiophylla* Schl. & Cham., *P. lumholtzii* Robins et Ferns, *P. teocote* Schl. & Cham., *Pseudotsuga menziesii* Mirb). Among the broadleaf trees are species of the genera *Alnus*, *Arbutus*, *Fraxinus* and *Quercus* (*Alnus firmifolia* Fernald, *Arbutus arizonica* [A.Gray] Sarg., *Arbutus bicolor* S. González, M. González et P. D. Sørensen, *Arbutus madrensis* S. González, *Arbutus tessellata* Sørensen, *Arbutus xalapensis* Kunth, *Fraxinus trifoliata* Torr., *Quercus arizonica* Sarg., *Q. crassifolia* Humb et Bonpl, *Q. durifolia* Seemen ex Loes, *Q. jonesii* Trel., *Q. laeta* Liebm., *Q. mcvaughii* Spellenb., *Q. obtusata* Bonpl, *Q. rugosa* Née and *Q. sideroxyla* Humb. et Bonpl). Table 1 shows the main descriptive statistics of the final database used in the fitting of the FDPs of the groups of conifers and broadleaf trees.

## Models

### Fitting PDFs

The diameter information for each group of species was tabulated in classes of 5 cm. The relative frequencies (ratio of the absolute frequency and the total num-

de Santiago Papasquiario, ubicado en las coordenadas: 105° 53' 36" -106° 12' 40" LO y 24° 48' 16" -25° 13' 32" LN. El tipo de vegetación predominante corresponde a bosques de pino-encino. La altura sobre el nivel del mar varía desde 1,400 hasta 3,000 m. El clima que prevalece es templado semifrío con un régimen de precipitación anual que fluctúa de 800 a 1,100 mm y temperatura media anual que varía de 8 °C en las partes más altas a 24 °C en las partes más bajas (García, 1981).

## Datos

Los datos empleados provienen de 44 parcelas permanentes de monitoreo del crecimiento y producción de los bosques del ejido San Diego de Tezains y zonas aledañas. Las parcelas fueron establecidas entre los años 2008 y 2009 de acuerdo con la metodología propuesta por Corral-Rivas et al. (2009), tratando de cubrir todos los tipos de vegetación, calidades de sitio y distribuciones diamétricas presentes en los rodales bajo manejo forestal. Las parcelas son cuadrangulares de 50 x 50 m y están distribuidas bajo un esquema del muestreo sistemático (malla de puntos equidistantes de 5 km); se pretende remedir las en intervalos de cinco años. Las variables registradas en los árboles con diámetro normal igual o mayor de 7.5 cm fueron: especie botánica, diámetro normal (d, con dos mediciones en cruz en mm), altura total del árbol (h en cm), altura de fuste limpio (m), azimut (°) y radio (m) desde el centro de la parcela (intersección entre las dos diagonales). En cada parcela se registraron también variables de información fisiográfica y del recurso suelo, tales como pendiente, exposición, profundidad del suelo, presencia de erosión, grosor, capas de materia orgánica y de *ocochal*.

En la base de datos se identificaron 27 especies de coníferas y latifoliadas para análisis posteriores. Las coníferas estudiadas pertenecen a los géneros *Cupressus*, *Juniperus*, *Pinus* y *Pseudotsuga* (*Cupressus lusitanica* Mill., *Juniperus deppeana* Steud., *J. durangensis* Martínez, *Pinus arizonica* Engelm, *P. strobiformis* Engelm, *P. durangensis* Martínez, *P. engelmannii* Carr., *P. leiophylla* Schl. & Cham., *P. lumholtzii* Robins et Ferns, *P. teocote* Schl. & Cham., *Pseudotsuga menziesii* Mirb). Entre las latifoliadas se encuentran especies de los géneros *Alnus*, *Arbutus*, *Fraxinus* y *Quercus* (*Alnus firmifolia* Fernald, *Arbutus arizonica* [A.Gray] Sarg., *Arbutus bicolor* S. González, M. González et P. D. Sørensen, *Arbutus madrensis* S. González, *Arbutus tessellata* Sørensen, *Arbutus xalapensis* Kunth, *Fraxinus trifoliata* Torr., *Quercus arizonica* Sarg., *Q. crassifolia* Humb et Bonpl, *Q. durifolia* Seemen ex Loes, *Q. jonesii* Trel., *Q. laeta* Liebm., *Q. mcvaughii* Spellenb., *Q. obtusata* Bonpl, *Q. rugosa* Née y *Q. sideroxyla* Humb. et Bonpl). El Cuadro 1 muestra los principales estadísticos descriptivos de la base de datos final usada en el ajuste de las FDP de los grupos de coníferas y latifoliadas.

**Table 1. Summary of the dataset used in the modeling of the diameter distributions of mixed and uneven-aged forests in the ejido San Diego Tezains in northwestern Durango.**

**Cuadro 1. Resumen de la base de datos empleada en la modelización de las distribuciones diamétricas de los bosques mixtos e irregulares del ejido San Diego Tezains en el noroeste de Durango.**

Group of species/ Grupo de especies	Observations/ Observaciones	Mean/ Media	Maximum diameter (cm)/ Diámetro máximo (cm)	Minimum diameter (cm)/ Diámetro mínimo (cm)	SD/DE	Mean/ Media	Maximum height (m)/ Altura máxima (m)	Minimum height (m)/ Altura mínima (m)	SD/DE
Conifers/ Coníferas	4,033	18.0	99.5	5.0	11.0	12.1	38.1	2.3	5.7
Broadleaf trees /Latifoliadas	1,801	18.4	90.0	5.0	10.8	8.7	29.8	1.8	4.2

SD: Standard deviation of mean.

DE: Desviación estándar de la media.

ber of trees) were used to fit the tri-parametric Weibull and Johnson's  $S_B$  PDFs. The expression of the Weibull function is as follows:

$$f(x_i) = \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right) \left(\frac{x_i - \varepsilon}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{x_i - \varepsilon}{\lambda}\right)^\gamma\right]; x_i > \varepsilon; \varepsilon, \lambda, \gamma > 0$$

where:

$f(x_i)$  = Relative frequency estimated for the diameter  $x_i$

$\varepsilon$  = Location parameter;

$\lambda$  = Scale parameter;

$\gamma$  = Shape parameter.

The parameter  $\gamma$  defines the shape of the curve representing the diameter distribution, so if  $\gamma < 1$ , typical curves from uneven-aged stands are obtained; if  $\gamma = 1$ , coincides with the exponential distribution; if  $1 < \gamma < 3.6$ , the curve shows asymmetry to the right; if  $\gamma = 3.6$ , the Weibull approaches to the normal and if  $\gamma > 3.6$ , the curve shows asymmetry to the left.

The expression of the Johnson's  $S_B$  likelihood function is as follows:

$$f(x_i) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(x_i - \varepsilon)(\varepsilon + \lambda - x_i)} e^{-\frac{1}{2} \left[ \gamma + \delta \cdot \ln\left(\frac{x_i - \varepsilon}{\varepsilon + \lambda - x_i}\right) \right]^2}$$

$$\varepsilon < x_i < \varepsilon + \lambda; \delta > 0; -\infty < \gamma < \infty; \lambda > 0; -\infty < \varepsilon < \infty$$

where:

$\varepsilon$  = Location parameter

$\lambda$  = Scale parameter

$\gamma$  and  $\delta$  = parameters depending on the stand and which must be determined, fulfilling that  $\delta, \varepsilon, \lambda > 0; -\infty < \lambda < \infty$  and being  $\gamma + \delta \cdot \ln[y_i / (1 - y_i)]$  with  $y_i = (x_i - \varepsilon) / \lambda$ , a variable that follows a normal distribution with a mean equal to 0 and a standard deviation equal to 1 [ $Z \sim N(0, 1)$ ].

Different studies have compared four procedures to estimate the parameters of the two FDP analyzed: i)

## Modelos

### Ajuste de FDP

La información diamétrica de cada grupo de especies se tabuló en clases de 5 cm. Las frecuencias relativas (cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de árboles) se utilizaron para ajustar las FDP Weibull triparamétrica y  $S_B$  de Johnson. La expresión de la función Weibull es la siguiente:

$$f(x_i) = \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right) \left(\frac{x_i - \varepsilon}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{x_i - \varepsilon}{\lambda}\right)^\gamma\right]; x_i > \varepsilon; \varepsilon, \lambda, \gamma > 0$$

donde:

$f(x_i)$  = Frecuencia relativa estimada para el diámetro  $x_i$

$\varepsilon$  = Parámetro de localización

$\lambda$  = Parámetro de escala

$\gamma$  = Parámetro de forma

El parámetro  $\gamma$  define la forma de la curva que representa la distribución diamétrica, de manera que si  $\gamma < 1$ , se obtienen curvas típicas de rodales irregulares; si  $\gamma = 1$ , coincide con la distribución exponencial; si  $1 < \gamma < 3.6$ , la curva presenta asimetría hacia la derecha; si  $\gamma = 3.6$ , la Weibull se aproxima a la normal y si  $\gamma > 3.6$ , la curva presenta asimetría hacia la izquierda.

La expresión de la función de probabilidad  $S_B$  de Johnson es la siguiente:

$$f(x_i) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(x_i - \varepsilon)(\varepsilon + \lambda - x_i)} e^{-\frac{1}{2} \left[ \gamma + \delta \cdot \ln\left(\frac{x_i - \varepsilon}{\varepsilon + \lambda - x_i}\right) \right]^2}$$

$$\varepsilon < x_i < \varepsilon + \lambda; \delta > 0; -\infty < \gamma < \infty; \lambda > 0; -\infty < \varepsilon < \infty$$

donde:

$\varepsilon$  = Parámetro de localización

$\lambda$  = Parámetro de escala

$\gamma$  y  $\delta$  = Parámetros que dependen del rodal y que se

maximum likelihood (MVS) (Devore, 1987; Johnson, 1949; Rennolls et al., 1985); ii) moments (MM) (Scolforo, Vitti, Grisi, Acerbi, & Assis, 2003; Shifley & Lentz, 1985); iii) nonlinear ordinary least squares regression (NPOs) (Zhou & McTague, 1996); and iv) percentiles (MP) (Bailey & Dell, 1973; Dubey, 1967; Knoebel & Burkhardt, 1991). The location parameter  $\varepsilon$  for all cases was estimated by the method of Zanakis (1979) due to the good results obtained in the characterization of the diameter distributions of many species in different geographic areas (Álvarez-González & Ruiz-González, 1998; Gorgoso, Álvarez, Rojo, & Grandas-Arias, 2007):

$$\varepsilon_{Zanakis} = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_n - x_2^2}{x_1 + x_n - 2x_2} & ; \text{if } x_2 - x_1 < x_n - x_2 \\ x_1 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

Where:

$x_1$  = Minimum diameter

$x_2$  = Diameter immediately above the minimum diameter

$x_n$  = Maximum diameter of the plot

The equations for estimating the remaining parameters of the FDPs evaluated with the procedures ML, MM and MP are shown in Table 2. The  $j$ -th percentiles were obtained by grouping the  $n$  diameters from the lowest to the highest  $x_1, x_2, \dots, x_n$  and calculating the next value:  $P_j = (1 - g)x_i + g(x_{i+1})$ , where  $i$  is the integer of the product  $n(j/\lambda)$  and  $g$  the fractional part of that quotient.

The shape parameter  $\gamma$  of the Weibull PDFs with ML was estimated by LIFEREG procedure in SAS/STAT™ (Statistical Analysis System [SAS Institute Inc.], 2008). Furthermore, the parameters of the Weibull and Johnson's  $S_B$  density functions by the ONLS method were estimated with the procedure MODEL SAS/ETS™ (SAS Institute Inc., 2008), using the parameters estimated by the MP as initial values.

### PDF assessment

The goodness of fit of the PDF with the methods used was evaluated by the Kolmogorov-Smirnov nonparametric test (K-S) (Sokal & Rohlf, 1981), which compares the cumulative relative frequency estimated with the cumulative relative frequency observed of the distribution; the most notable difference between the two frequencies is given by the  $D_n$  value of the following expression:

$$D_n = \max_{1 \leq i \leq n} \left( F(x_i) - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F(x_i) \right)$$

where:

$F(x_i)$  = Cumulative relative value of distribution fitted to the diameter  $x_i$

$n$  = Number of observations

deben determinar, cumpliéndose que  $\delta, \varepsilon, \lambda > 0$ ;  $-\alpha < \lambda < \alpha$  y siendo  $\gamma + \delta \cdot \ln[y_i / (1 - y_i)]$  con  $y_i = (x_i - \varepsilon) / \lambda$ , una variable que sigue una distribución normal de media igual a 0 y desviación típica igual a 1 [ $Z \sim N(0, 1)$ ].

Existen trabajos donde se han comparado cuatro procedimientos para estimar los parámetros de las dos FDP: i) máxima verosimilitud (MVS) (Devore, 1987; Johnson, 1949; Rennolls et al., 1985); ii) momentos (MM) (Scolforo, Vitti, Grisi, Acerbi, & Assis, 2003; Shifley & Lentz, 1985); iii) regresión no lineal por mínimos cuadrados ordinarios (ONLS) (Zhou & McTague, 1996); y iv) percentiles (MP) (Bailey & Dell, 1973; Dubey, 1967; Knoebel & Burkhardt, 1991). El parámetro de localización  $\varepsilon$  para todos los casos fue estimado mediante el procedimiento de Zanakis (1979), debido a los buenos resultados obtenidos en la caracterización de las distribuciones diamétricas de numerosas especies en ámbitos geográficos distintos (Álvarez-González & Ruiz-González, 1998; Gorgoso, Álvarez, Rojo, & Grandas-Arias, 2007):

$$\varepsilon_{Zanakis} = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_n - x_2^2}{x_1 + x_n - 2x_2} & ; \text{si } x_2 - x_1 < x_n - x_2 \\ x_1 & ; \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde:

$x_1$  = Diámetro mínimo

$x_2$  = Diámetro inmediatamente superior al diámetro mínimo

$x_n$  = Diámetro máximo de la parcela

Las ecuaciones para estimar el resto de los parámetros de las FDP evaluadas con los procedimientos MVS, MM y MP se muestran en el Cuadro 2. Los percentiles  $j$ -ésimos se obtuvieron ordenando los  $n$  diámetros de menor a mayor  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y calculando el siguiente valor:  $P_j = (1 - g)x_i + g(x_{i+1})$ , donde  $i$  es la parte entera del producto  $n(j/\lambda)$  y  $g$  la parte fraccional de ese mismo cociente.

El parámetro de forma  $\gamma$  de la FDP Weibull con el MVS se estimó mediante el procedimiento LIFEREG en SAS/STAT™ (Statistical Analysis System [SAS Institute Inc.], 2008). Por otra parte, los parámetros de las funciones de densidad de Weibull y  $S_B$  de Johnson por el método ONLS se estimaron con el procedimiento MODEL SAS/ETS™ (SAS Institute Inc., 2008), utilizando los parámetros estimados por el MP como valores iniciales

### Evaluación de FDP

La bondad de ajuste de las FDP con los métodos utilizados fue evaluada mediante la prueba no paramétrica de Kolmogorov-Smirnov (K-S) (Sokal & Rohlf, 1981), que compara la frecuencia relativa acumulada estimada con la frecuencia relativa acumulada observada de la distribución; la diferencia más notable entre ambas

**Table 2. Equations for estimating the scale ( $\lambda$ ) and shape ( $\gamma$ ) parameters of the Weibull and SB de Johnson's probability density functions (PDFs).****Cuadro 2. Ecuaciones para estimar los parámetros de escala ( $\lambda$ ) y forma ( $\gamma$ ) de las funciones de densidad de probabilidad (FDP) Weibull y SB de Johnson.**

Method/Método	Parameters/Parámetros		
	$\lambda$	$\gamma$	$\delta$
Weibull PDFs/ FDP Weibull			
ML/MVS	$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}$	$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma} - \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)$	
MM	$\frac{\bar{d}}{\Gamma\left[1 + \frac{1}{\gamma}\right]}$	$\sigma^2 = \frac{\bar{d}^2}{\Gamma^2\left[1 + \frac{1}{\gamma}\right]} \cdot \left(\Gamma\left[1 + \frac{2}{\gamma}\right] - \Gamma^2\left[1 + \frac{1}{\gamma}\right]\right)$	
MP	$p_{63} - \varepsilon$	$\frac{\ln\left[\frac{\ln(1-0.97)}{\ln(1-0.17)}\right]}{\ln\left(\frac{p_{97} - \varepsilon}{p_{17} - \varepsilon}\right)}$	
Johnson's $S_b$ PDFs/ FDP SB de Johnson			
ML/MVS	$d_{max} - d_{min}$	$\frac{-\bar{r}}{S_r}$	$\frac{1}{S_r}$
MM	$d_{max} - d_{min}$	$\delta \ln\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right) + \left(\frac{0.5-\mu}{\delta}\right)$	$\frac{\mu(1-\mu)}{S_d} + \frac{S_d}{4} \left[\frac{1}{\mu(1-\mu)} - 8\right]$
MP	$d_{max} - d_{min}$	$-\delta \ln\left(\frac{p_{50} - \varepsilon}{\varepsilon + \lambda - p_{50}}\right)$	$\frac{1.96}{\ln\left(\frac{p_{95} - \varepsilon}{\varepsilon + \lambda - p_{95}}\right) - \ln\left(\frac{p_{50} - \varepsilon}{\varepsilon + \lambda - p_{50}}\right)}$

Methods: ML = Maximum likelihood method, MM = Method of moments, MP = Method of percentiles. Where:  $n$  = Number of observations;  $\bar{d}$ ,  $d_{min}$ ,  $d_{max}$  = Mean, minimum, maximum diameter, respectively;  $\sigma^2$  = Variance of the distribution;  $\Gamma(i)$  = Gamma function tabulated as  $(i-1)!$ ;  $y_i$  = Cumulative relative frequency for  $x_i$ ;  $p_j$  = Percentiles 17, 50, 63, 95 and 97 of the distribution; = Mean of  $r_i$ ,  $r_i = \ln[(x_i - \varepsilon)/(\varepsilon - \lambda - x_i)]$ ,  $S_r$  = Standar deviation of  $r_i$ ;  $\mu = (\bar{d} - \varepsilon)/\lambda$  y  $S_d$  = Modified standard deviation =  $\sqrt{\sigma^2}/\lambda$ . The asterisk (\*) indicates that the parameter must be obtained by solving iteratively the proposed equation.

Métodos: MVS = Método de máxima verosimilitud, MM = Método de momentos, MP = Método de percentiles. Donde:  $n$  = Número de observaciones;  $\bar{d}$ ,  $d_{min}$ ,  $d_{max}$  = Diámetro medio, mínimo, máximo, respectivamente;  $\sigma^2$  = Varianza de la distribución;  $\Gamma(i)$  = Función gamma tabulada como  $(i-1)!$ ;  $y_i$  = Frecuencia relativa acumulada para  $x_i$ ;  $p_j$  = Percentiles 17, 50, 63, 95 y 97 de la distribución; = media de  $r_i$ ,  $r_i = \ln[(x_i - \varepsilon)/(\varepsilon - \lambda - x_i)]$ ,  $S_r$  = Desviación estándar de  $r_i$ ;  $\mu = (\bar{d} - \varepsilon)/\lambda$  y  $S_d$  = Desviación estándar modificada =  $\sqrt{\sigma^2}/\lambda$ . El asterisco (\*) indica que el parámetro debe ser obtenido al resolver de forma iterativa la ecuación planteada.

The value  $D_n$  is compared to the critical value  $D_{n,\alpha}^*$  obtained from a table of K-S according to  $n$  and a significance level selected. If  $D_n$  is greater than the critical value, the null hypothesis that the sample population follow the fitted distribution function, is rejected. Moreover, consistency in the fitting of the PDF for each procedure was assessed by bias, mean absolute error (MAE) and mean square error (MSE) defined by the following expressions:

$$\text{Bias} = \sum_{i=1}^n \left[ f(x_i) - \hat{f}(x_i) \right] / n$$

$$\text{MAE} = \sum_{i=1}^n \left| f(x_i) - \hat{f}(x_i) \right| / n$$

$$\text{MSE} = \sum_{i=1}^n \left[ f(x_i) - \hat{f}(x_i) \right]^2 / (n - p)$$

in these criteria:

$f(x_i)$  = Observed relative frequency

$\hat{f}(x_i)$  = Estimated relative frequency

$n$  = Number of observations

$p$  = Number of parameters of the PDFs

frecuencias estará dada por el valor  $D_n$  de la siguiente expresión:

$$D_n = \max_{1 \leq i \leq n} \left( F(x_i) - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F(x_i) \right)$$

donde:

$F(x_i)$  = Valor relativo acumulado de la función de distribución ajustada para el diámetro  $x_i$   
 $n$  = Número de observaciones

El valor  $D_n$  se compara con el valor crítico  $D_{n,\alpha}^*$  obtenido de una tabla de K-S en función de  $n$  y un nivel de significancia elegido. Si  $D_n$  es mayor que el valor crítico, se rechaza la hipótesis nula de que la población de la cual proviene la muestra siga la función de distribución ajustada. Por otra parte, la consistencia en el ajuste de las FDP para cada procedimiento se evaluó mediante el sesgo, el error medio absoluto (EMA) y el error medio cuadrático (EMC) definidos con las siguientes expresiones:

### Modeling the parameters of the PDFs

The methods described above allow to estimate the parameters of the PDF when we have a diametric inventory of the stand. However, one of the objectives of this study is to develop methodologies to obtain the parameters of a PDF when we do not have the inventory, only the stand variables. Thus, using stand models that allow to estimate these variables for a future instant, we can estimate a diameter distribution. To do this, there are two methods: i) parameter prediction methods (PPM) and ii) parameter recovery methods (PRM). This study analyzed both methodologies to estimate the future diameter distributions.

Following the PPM, the parameters  $\theta$  of the PDF estimated by the best fitting methodology is related to the main variables of the stand of the plots used by a simple linear regression model:

$$\theta_i = f(D_g, H_0, D_0, N, G, \dots)$$

where:

$D_g$  = Mean square diameter (cm)

$H_0$  = Dominant height (m)

$D_0$  = Dominant diameter (cm)

$N$  = Number of trees per hectare

$G$  = Basal area ( $\text{m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$ )

The parameters  $H_0$  and  $D_0$  of each plot were estimated as the average of the 100 thickest trees per hectare. Since the parameters of the PDFs used are strongly correlated with each other, it is expected that the model errors are also correlated. Therefore, all predictor equations of the parameters were fitted using the simultaneous estimation procedure proposed by Borders (1989). The adjustments were made using the full information maximum likelihood approach (FIML) using the MODEL procedure of SAS/ETS® (SAS Institute Inc., 2008).

Moreover, following the PRM, the MM was used assuming that the location parameter  $\varepsilon$  corresponds to the minimum diameter measured (7.5 cm). For the Weibull function, we followed the methodology described by Shifley and Lentz (1985), so that the first moment with respect to zero; that is, the average diameter ( $\bar{d}$ ), and the second moment with respect to the mean; that is, the variance of the diameter distribution ( $\sigma^2$ ) allowed to calculate the parameters of the Weibull PDFs using equations shown in Table 2. However, the future value of the  $\bar{d}$  of the stand must be estimated, since it cannot be obtained directly from the stand variables ( $G$ ,  $N$  and  $H_0$ ). Since the value of  $\bar{d}$  in a stand is always less than or equal to the value of  $D_g$ , a compatibility equation is adjusted which allows the estimation of  $\bar{d}$  from  $D_g$  and other variables:

$$\text{Sesgo} = \sum_{i=1}^n \left[ f(x_i) - \hat{f}(x_i) \right] / n$$

$$\text{EMA} = \sum_{i=1}^n \left| f(x_i) - \hat{f}(x_i) \right| / n$$

$$\text{EMC} = \sum_{i=1}^n \left[ f(x_i) - \hat{f}(x_i) \right]^2 / (n - p)$$

en esos criterios:

$f(x_i)$  = Frecuencia relativa observada

$\hat{f}(x_i)$  = Frecuencia relativa estimada

$n$  = Número de observaciones

$p$  = Número de parámetros de la FDP.

### Modelado de los parámetros de las FDP

Los métodos descritos anteriormente permiten estimar los parámetros de las FDP cuando se cuenta con un inventario diamétrico del rodal. Sin embargo, uno de los objetivos de este trabajo es poder desarrollar metodologías que permitan obtener los parámetros de una FDP cuando no se cuenta con dicho inventario, sino que únicamente se cuenta con variables del rodal. De esta forma, empleando modelos de rodal que permitan estimar dichas variables para un instante futuro se podrá construir una distribución diamétrica. Para ello, existen dos metodologías: i) los métodos de predicción de parámetros (PPM, por sus siglas en inglés) y ii) los métodos de recuperación de parámetros (PRM, por sus siglas en inglés). En este estudio se analizaron ambas metodologías para reconstruir las distribuciones diamétricas futuras.

Siguiendo el PPM, los parámetros  $\theta_i$  de las FDP estimadas por la mejor metodología de ajuste se relacionaron con las principales variables del rodal de las parcelas utilizadas, mediante un modelo de regresión lineal simple:

$$\theta_i = f(D_g, H_0, D_0, N, G, \dots)$$

donde:

$D_g$  = Diámetro cuadrático medio (cm)

$H_0$  = Altura dominante (m)

$D_0$  = Diámetro dominante (cm)

$N$  = Número de árboles por hectárea

$G$  = Área basal ( $\text{m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$ )

Los parámetros  $H_0$  y  $D_0$  de cada parcela se estimaron como el promedio de los 100 árboles más gruesos por hectárea. Puesto que los parámetros de las FDP utilizadas están fuertemente correlacionados entre sí, es de esperar que los errores de los modelos ajustados también lo estén. Por tanto, todas las ecuaciones predictoras de los parámetros se ajustaron mediante



$$\bar{d} = D_g - \exp(\mathbf{X} \cdot \beta)$$

where  $\mathbf{X}$  is a vector of stand variables that characterize the state of the stand at any age and can be obtained from a static or dynamic stand model and  $\beta$  is a set of parameters depending on the species. The  $D_g$  value of stand at any age can be calculated from  $N$  and  $G$ , which are output variables of any stand model. Finally, once the value of  $\bar{d}$  and  $D_g$  of the stand are known, the variance  $\sigma^2$  (moment of second order of the distribution according to the mean) can be calculated by the following mathematical relationship:

$$\sigma^2 = D_g^2 - \bar{d}^2$$

in the case of Johnson's SB density function, the parameter recovery methodology for the MM needs to use, in addition to the equation  $\bar{d} = D_g - \exp(\mathbf{X} \cdot \beta)$ , another fitted equation relating the maximum diameter of the distribution with the stand variables that may be estimated from growth models. With these two equations we can use the ratios of Table 2 to recover  $\lambda$ ,  $\gamma$  and  $\delta$  assuming the location parameter  $\varepsilon$  corresponds to the minimum diameter measured in the inventory.

## Results and discussion

### Assessing the fitting methods of the PDFs

Table 3 shows the number and percentage of plots that showed similarity in the diameter distribution observed and estimated with both PDFs evaluated for the groups of conifers and broadleaf trees, using the Kolmogorov-Smirnov (K-S) test considering a significance level of  $P = 0.05$ . Of the four parameter fitting methods, the MM method had the best results for the Weibull PDF, with 91 and 87 % similarity of diameter distribution in the groups of species of conifers and broadleaf trees, respectively. The ONLS method had the lowest percentage (73 % for conifers and 80 % for broadleaf trees); while for ML and MP, the similarity of plots was almost the same (87 and 86 %) for both groups of species.

Meanwhile, fitting parameters of Johnson's  $S_B$  PDF, the ONLS method was the most efficient to accept the null hypothesis of the K-S test; i.e., 82 and 66 % similarity in the diameter distribution for conifers and broadleaf trees, respectively. On the contrary, the MM method had the lowest percentage of similar plots for coniferous (64 %) and broadleaf trees (61 %), followed by MP and ML.

In general, the best results of goodness of fit evaluated by statistical bias, EMA and EMC, were obtained by the MM method for the Weibull PDF and with the ONLS method for the Johnson's  $S_B$  PDF. The sample plots

el procedimiento de estimación simultáneo propuesto por Borders (1989). Los ajustes se hicieron por el método de máxima verosimilitud con información completa (FIML), mediante el procedimiento MODEL de SAS/ETS® (SAS Institute Inc., 2008).

Por otro lado, siguiendo el PRM, se empleó el MM asumiendo que el parámetro de localización  $\varepsilon$  corresponde al diámetro mínimo inventariable de la distribución (7.5 cm). En el caso de la función Weibull se siguió la metodología descrita por Shifley y Lentz (1985), de modo que el momento de primer orden con respecto a cero; es decir, el diámetro medio ( $\bar{d}$ ), y el momento de segundo orden con respecto a la media; esto es, la varianza de la distribución diamétrica ( $\sigma^2$ ) permitieron calcular los parámetros de la FDP de Weibull empleando las ecuaciones del Cuadro 2. Sin embargo, el valor futuro del  $\bar{d}$  del rodal debe ser estimado, puesto que no puede obtenerse directamente a partir de las variables de rodal que los modelos de crecimiento estiman ( $G$ ,  $N$  y  $H_0$ ). Dado que el valor de  $\bar{d}$  en un rodal siempre es menor o igual que el valor de  $D_g$ , se ajusta una relación de compatibilidad que permita estimar el  $\bar{d}$  a partir del  $D_g$  y otras variables de rodal:

$$\bar{d} = D_g - \exp(\mathbf{X} \cdot \beta)$$

donde  $\mathbf{X}$  es un vector de variables de rodal que caracterizan el estado del mismo a cualquier edad y que pueden obtenerse de un modelo de rodal estático o dinámico y  $\beta$  es un conjunto de parámetros que dependen de las especies. El valor del  $D_g$  del rodal a cualquier edad puede calcularse a partir de  $N$  y  $G$ , que son variables de salida de cualquier modelo de rodal. Por último, una vez conocido el valor de  $\bar{d}$  y  $D_g$  del rodal, la varianza  $\sigma^2$  (momento de segundo orden de la distribución respecto a la media) puede calcularse mediante la relación matemática siguiente:

$$\sigma^2 = D_g^2 - \bar{d}^2$$

en el caso de la función de densidad  $S_B$  de Johnson, la metodología de recuperación de parámetros por el MM requiere emplear, además de la ecuación  $\bar{d} = D_g - \exp(\mathbf{X} \cdot \beta)$ , otra ecuación ajustada que relacione el diámetro máximo de la distribución con variables de rodal que puedan estimarse a partir de los modelos de crecimiento. Con estas dos ecuaciones podrán emplearse las relaciones del Cuadro 2 para recuperar  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  asumiendo que el parámetro de localización  $\varepsilon$  corresponde al diámetro mínimo inventariable.

## Resultados y discusión

### Evaluación de los métodos de ajuste de las FDP

El Cuadro 3 muestra el número y porcentaje de parcelas que presentaron similitud en la distribución diamétrica

**Table 3. Goodness of fit of the probability density function (PDFs) for the different methods and species groups. Number of similar plots in the estimated and observed diameter distribution.**

**Cuadro 3. Bondad de ajuste de las funciones de densidad de probabilidad (FDP) para los diferentes métodos y grupos de especies. Número de parcelas similares en la distribución diamétrica estimada y observada.**

Group of species / Grupo de especies	Weibull PDFs / FDP Weibull				$S_B$ Johnson PDFs / FDP $S_B$ Johnson			
	ML/MVS	MM	ONLS	MP	ML	MM	ONLS	MP
Conifers / Coníferas								
<i>n</i>	39	40	32	39	35	28	36	33
%	88.6	90.9	72.7	88.6	79.5	63.6	81.8	75.0
Broadleaf trees / Latifoliadas								
<i>n</i>	38	39	35	38	28	27	29	27
%	86.4	88.6	79.5	86.4	63.6	61.4	65.9	61.4

Methods: ML = Maximum likelihood method, MM = Method of moments, ONLS = Nonlinear regression by ordinary least squares, MP = Method of percentiles.

*n*: Number of plot where the estimated diameter distribution is not significantly different from that observed for a total of 44 plots, according to the Kolmogorov-Smirnov test ( $P = 0.05$ ).

Métodos: MVS = Método de máxima verosimilitud, MM = Método de momentos, ONLS = Regresión no lineal por mínimos cuadrados ordinarios, MP = Método de percentiles.

*n*: Número de parcelas en las que la distribución diamétrica estimada no es significativamente diferente de la observada para un total de 44 parcelas, de acuerdo con la prueba de Kolmogorov-Smirnov ( $P = 0.05$ ).

that passed the K-S test in the groups of species of conifers and broadleaf trees had average bias values closer to 0 with the Weibull PDF (0.00015 and -0.00005) than with the Johnson's  $S_B$  PDF (0.00074 and 0.00098). Also the value of EMA of the Weibull PDF was slightly lower (0.025 and 0.033) compared to the value of the Johnson's  $S_B$  PDF (0.039 and 0.480) for both groups of species. Finally, the EMC value of the Weibull PDF was also lower (0.035 and 0.046) than the value estimated with the Johnson's  $S_B$  PDF (0.074 and 0.091) in the two groups of species.

The estimation of the parameters by the procedure ML is the most reliable, considering both PDFs and the two groups of species. Similar results were obtained in previous studies by comparing this procedure with MM and MP (Zhang et al., 2003; Zhou & McTague, 1996). Figure 1 shows the behavior of bias and EMC for diameter class of the two PDF evaluated with the best fitting methodology for the two groups of species. In the graph it can be seen that both PDFs were similar except for the diameter classes less than 20 cm, where the adjustment of the Johnson's  $S_B$  PDF was more biased and less accurate.

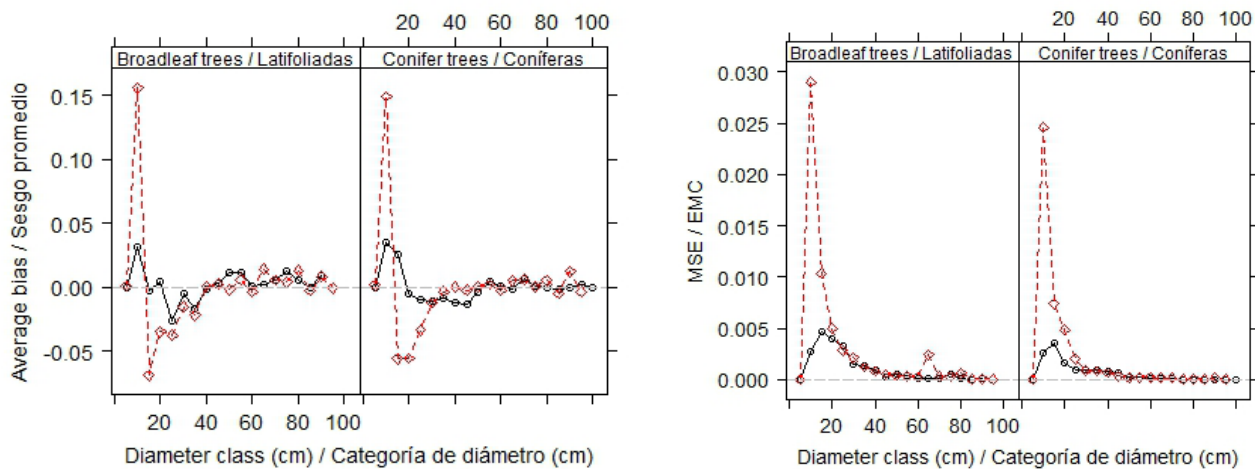
### Estimation of the parameters of the future distribution

The change in the distribution of mixed and uneven-aged stands is well modeled by the Weibull PDF achieving to represent all forms of the observed distributions. The Johnson's  $S_B$  PDF presents problems in modeling distributions too platykurtics and irregular (mainly in young stands), that is shown in the graphics for these stands. This demonstrates the flexibility of

observada y estimada con las dos FDP evaluadas para los grupos de especies de coníferas y latifoliadas, mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov (K-S) considerando un nivel de significancia de  $P = 0.05$ . De los cuatro métodos de ajuste de parámetros, el MM presentó los mejores resultados para la FDP Weibull, con 91 y 87 % de similitud de distribución diamétrica en los grupos de especies de coníferas y latifoliadas, respectivamente. El método ONLS presentó el porcentaje más bajo (73 % para coníferas y 80 % para latifoliadas); en tanto que para los MVS y MP, la similitud de parcelas fue casi la misma (87 y 86 %) para ambos grupos de especies.

Por su parte, en el ajuste de parámetros de la FDP  $S_B$  de Johnson, el método ONLS fue el más eficiente al aceptarse la hipótesis nula de la prueba de K-S; es decir, 82 y 66 % de similitud en la distribución diamétrica para coníferas y latifoliadas, respectivamente. Por el contrario, el método MM presentó el porcentaje más bajo de parcelas similares para coníferas (64 %) y latifoliadas (61 %), seguido por los MP y MVS.

En general, los mejores resultados de bondad del ajuste, evaluados mediante los estadísticos de sesgo, EMA y EMC, se obtuvieron mediante el método MM para la FDP Weibull y con el método ONLS para la FDP  $S_B$  Johnson. Las parcelas que superaron la prueba de K-S en los grupos de especies de coníferas y latifoliadas tuvieron valores del sesgo promedio más cercano a 0 con la FDP Weibull (0.00015 y -0.00005) que con la FDP  $S_B$  Johnson (0.00074 y 0.00098). También el valor del EMA de la FDP Weibull fue ligeramente menor (0.025 y 0.033) respecto del valor de la FDP  $S_B$  Johnson (0.039 y 0.480), para ambos grupos de especies. Finalmente, el valor del EMC de la FDP Weibull también resultó



**Figure 1. Evolution of average bias (left) and mean square error (MSE, right) by diameter class of Weibull probability density function with estimated parameters by means of the method of moments (solid line) and Johnson's  $S_b$  with parameter estimated by Least Ordinary Square (dashed line).**

**Figura 1. Evolución del sesgo (izquierda) y error medio cuadrático (EMC, derecha) por clase diamétrica de la funciones de densidad de probabilidad Weibull con parámetros estimados por método de los momentos (línea continua), y  $S_b$  Johnson con parámetros estimados por mínimos cuadrados ordinarios (línea discontinua).**

the Weibull PDF that requires only the estimation of three parameters compared to the four parameters to be estimated in the Johnson's  $S_b$  PDF; parsimony evidenced by bias and EMC. Regarding the above, and because the Weibull PDF had better goodness of fit statistics and better results with the K-S test when parameters are estimated by the MM, the rest of the analysis in this paper are limited to this function for modeling future diameter distributions.

By comparing the two methods of modeling parameters (PPM and PRM) for the Weibull PDF, significant differences in the number of plots which passed the  $H_0$  with the K-S test ( $P = 0.05$ ) were obtained.

As already mentioned, the use of PRM using the equations relating the parameters with the moments of the distribution (Table 2) requires the prior adjustment of equations to estimate the  $\bar{d}$  of the future distribution. For the group of conifers, the result of the adjustment of these equations was as follows:

$$\bar{d} = D_g - \exp(0.2823 - 0.00197 * N + 0.0764 * H_0)$$

( $R^2 = 0.962$ ; RMSE = 1.13 cm)

For the broadleaf trees:

$$\bar{d} = D_g - \exp(1.0923 - 0.00393 * N + 0.0793 * G)$$

( $R^2 = 0.889$ ; RMSE = 1.52 cm)

where:

$D_g$  = Mean square diameter (cm)

$H_0$  = Dominant height (m)

$N$  = Number of trees per hectare

$G$  = Basal area ( $m^2 \cdot ha^{-1}$ )

menor (0.035 y 0.046) que el valor estimado con la FDP  $S_b$  Johnson (0.074 y 0.091) en los dos grupos de especies.

La estimación de los parámetros por el procedimiento de MVS es la más fiable, considerando conjuntamente las dos FDP y los dos grupos de especies. Resultados similares se han obtenido en estudios previos al comparar dicho procedimiento con MM y MP (Zhang et al., 2003; Zhou & McTague, 1996). En la Figura 1 se observa el comportamiento del sesgo y EMC por categoría diamétrica de las dos FDP evaluadas con la mejor metodología de ajuste para los dos grupos de especies. En la gráfica puede observarse que ambas FDP fueron similares, excepto para las categorías de diámetro menores de 20 cm, donde el ajuste de la FDP  $S_b$  Johnson fue más sesgado y menos preciso.

### Estimación de los parámetros de la distribución futura

El cambio en la distribución de las masas mixtas e irregulares es bien modelada por la FDP Weibull logrando representar todas las formas de las distribuciones observadas. La FDP  $S_b$  Johnson presenta problemas en la modelación de distribuciones demasiadas planicúrticas e irregulares (principalmente en masas jóvenes), así lo evidencian los gráficos para estas masas. Esto demuestra la flexibilidad de la FDP Weibull que requiere sólo la estimación de tres parámetros en comparación con los cuatro parámetros que deben ser estimados en la FDP  $S_b$  Johnson; parsimonia evidenciada por el sesgo y el EMC. Considerando lo anterior y, dado que la FDP Weibull presentó mejores estadísticos de bondad de ajuste y mejores resultados con la prueba de K-S cuando los parámetros son estimados por el MM,

$R^2$  = Coefficient of determination (%)

RMSE = root mean square error

Once the future mean diameter was estimated and the Weibull PDF parameters were recovered with the MM equations in Table 2, 52.3 % of the plots passed the K-S test ( $P = 0.05$ ) in both groups of species. This value is reduced when compared with the results obtained in the adjustment phase; the reason for this reduction was due to poor estimates of the scale parameter  $\lambda$ .

The PPM methodology was inefficient. In most cases, trying to predict the shape and scale ( $\gamma$  and  $\lambda$ ) parameters simultaneously depending on the variables of the stand, it failed to explain more than 20 % of the variability observed; thus, the percentage of the plots that accepted the null hypothesis of the K-S test was very low for both groups of species. These results contrast with relatively good estimates obtained by Gorgoso-Varela and Rojo-Alboreca (2014) and Maldonado-Ayala and Nívar (2002). However, we consider that those authors worked with plantations or even-aged stands, whose diameter distributions are easier to characterize compared to mixed and uneven-aged forests used in this study.

The resulting estimates were more accurate than those obtained with the PRM when considering only the scale parameter ( $\lambda$ ). For this reason, it was decided to use a combination of both methods to model the future diameter distribution, so that the scale parameter  $\lambda$  was estimated by the following equations:

Conifers:  $\lambda = \exp(1.2134 + 0.07468 * D_g - 0.0245 * H_0)$

( $R^2 = 0.868$ ; RMSE = 2.01)

Broadleaf trees:  $\lambda = \exp(0.9183 + 0.05269 * D_g + 0.0197 * H_0)$

( $R^2 = 0.750$ ; RMSE = 2.50)

Moreover, the shape parameter  $\gamma$  was recovered using the MM through the prediction equations of the  $\bar{d}$  estimated. With this procedure, 71 % of the plots of conifers and 69 % of broadleaf trees passed the K-S test; values closest to those obtained in the adjustment phase, considering the accumulated errors due to the use of the equations described above to model the future diameter distributions.

Previous studies have examined the accuracy of prediction methods and recovery parameters and they differ in the results. While some emphasize the predictive ability of indirect estimation method (PRM), others highlight the accuracy and parsimony of the direct prediction method (PPM). Jian and Brooks (2009) studied both methods in *Pinus palustris* Mill., whose age ranged from 3 to 20 years, with stand densities between 273 and 857 trees·ha<sup>-1</sup>. The authors found that direct prediction method is more accurate, disagreeing with

el resto de los análisis en este documento se limitan a dicha función para la modelación de las distribuciones diamétricas futuras.

Al comparar las dos metodologías de modelado de parámetros (PPM y PRM) para la FDP Weibull, se obtuvieron diferencias importantes en el número de parcelas que superaban la  $H_0$  con la prueba de K-S ( $P = 0.05$ ).

Como ya se comentó, el empleo del PRM utilizando las ecuaciones que relacionan los parámetros con los momentos de la distribución (Cuadro 2) requiere del ajuste previo de ecuaciones que permitan estimar el  $\bar{d}$  de la distribución futura. En el caso del grupo de coníferas, el resultado del ajuste de dichas ecuaciones fue el siguiente:

$\bar{d} = D_g - \exp(0.2823 - 0.00197 * N + 0.0764 * H_0)$   
( $R^2 = 0.962$ ; RMSE = 1.13 cm)

En el caso de las latifoliadas:

$\bar{d} = D_g - \exp(1.0923 - 0.00393 * N + 0.0793 * G)$   
( $R^2 = 0.889$ ; RMSE = 1.52 cm)

donde:

$D_g$  = Diámetro cuadrático medio (cm)

$H_0$  = Altura dominante (m)

$N$  = Número de árboles por hectárea

$G$  = Área basal (m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>)

$R^2$  = Coeficiente de determinación (%)

REMC = Raíz del error medio cuadrático

Una vez que se estimó el diámetro medio futuro y se recuperaron los parámetros de la FDP Weibull con las ecuaciones del MM del Cuadro 2, 52.3 % de las parcelas superaron la prueba de K-S ( $P = 0.05$ ) en ambos grupos de especies. Dicho valor es reducido si se compara con los resultados obtenidos en la fase de ajuste; la razón de esta reducción se debió a las malas estimaciones del parámetro de escala  $\lambda$ .

Por su parte, la metodología de PPM fue ineficiente. En la mayoría de los casos, al tratar de predecir los parámetros de forma y escala ( $\gamma$  y  $\lambda$ ) simultáneamente en función de las variables del rodal, no logró explicarse más de 20 % de la variabilidad observada; por tanto, el porcentaje de las parcelas que aceptaron la  $H_0$  fue muy bajo, para ambos grupos de especies. Estos resultados contrastan con las relativamente buenas estimaciones obtenidas por Gorgoso-Varela y Rojo-Alboreca (2014) y Maldonado-Ayala y Nívar (2002). No obstante, hay que considerar que dichos autores trabajaron con plantaciones o rodales regulares, cuyas distribuciones diamétricas son más sencillas de caracterizar que las de los bosques mixtos e irregulares empleados en este trabajo.

the results obtained in this study. Cao (2004) tested six methods for predicting the Weibull PDF parameters, including the indirect method PRM and found poor precision compared with other methods tested. The same author also developed an algorithm to predict the parameters of Weibull PDF obtained by means of the ML evaluating the PPM method and found good and more accurate results in the EMC, compared to indirect estimation methods. Leduc Matney, Belli and Baldwin (2001) analyzed two procedures similar to those used in this study, obtaining comparable results; although the system of linear equations with variables of state to predict the parameters of the Weibull PDF showed slightly better results in contrast to the PRM. Meanwhile Gorgoso et al. (2007) found significant advantages to recover the diameter distribution in stands of *Betula alba* L. when using indirect methods (PRM) by the prediction of the parameters of Weibull PDF by the MM. In general, the method of indirect estimation PRM is effective in predicting the parameters of the Weibull PDF; however, the accuracy is conditional on the level of truncation of the diameter distribution (Borders & Patterson, 1990; Jiang & Brooks, 2009; Vanclay, 1995). So in diameter distributions of second-growth forests and subjected to a regime of uneven-aged management, as those used in this study, the PRM is not recommended due to the high variability of the distribution parameters, especially the scale parameter  $\lambda$ , with respect to the variables of the stand. This study showed a direct relationship among the scale parameter  $\lambda$ , the quadratic mean diameter and dominant height, for that reason it was decided to improve the accuracy using this relationship and recovering the shape parameter using the MM.

Despite the acceptable results, an important part of the diameter distributions analyzed could not be modeled correctly with the proposed methodology, so we recommend trying other techniques in future studies. A line of future research should focus on changes made to the Weibull density function to make it even more flexible, as that proposed by Lai, Xie and Murthy (2003) or the generalization called "Odd Weibull family" proposed by Cooray (2006). Another alternative would be to analyze the use of finite mixtures of one function or different functions that have already been successful in characterizing diameter distributions (Liu, Zhang, Davis, Solomon & Gove, 2002). In any case, the use of these functions for modeling future diameter distributions, would expect to fit a higher number of equations when having more parameters, which would add a new source of error and could limit its use.

## Conclusions

The best estimates were obtained by fitting the three parameters Weibull, density function using the method

Las estimaciones obtenidas fueron más exactas que las obtenidas con el PRM cuando se considera únicamente el parámetro de escala ( $\lambda$ ). Por esta razón, se decidió emplear una combinación de ambas metodologías para modelar la distribución diamétrica futura, de modo que el parámetro de escala  $\lambda$  fue estimado mediante las siguientes ecuaciones:

$$\text{Coníferas: } \lambda = \exp(1.2134 + 0.07468 * D_g - 0.0245 * H_0) \\ (R^2 = 0.868; \text{RMSE} = 2.01)$$

$$\text{Latifoliadas: } \lambda = \exp(0.9183 + 0.05269 * D_g + 0.0197 * H_0) \\ (R^2 = 0.750; \text{RMSE} = 2.50)$$

Por otra parte, el parámetro de forma  $\gamma$  fue recuperado utilizando el MM a través de las ecuaciones de predicción del  $\bar{d}$  estimado. Con este procedimiento, 71 % de las parcelas de coníferas y 69 % de latifoliadas superaron la prueba de K-S; valores más cercanos a los obtenidos en la fase de ajuste, considerando los errores acumulados debido al empleo de las ecuaciones descritas anteriormente para modelar las distribuciones diamétricas futuras.

Estudios previos que han analizado la precisión de los métodos de predicción y recuperación de parámetros difieren en los resultados obtenidos. Mientras unos destacan la capacidad predictiva del método indirecto de estimación (PRM), otros destacan la precisión y parsimonia del método de predicción directo (PPM). Jian y Brooks (2009) estudiaron ambos métodos en plantaciones de *Pinus palustris* Mill., cuya edad variaba entre 3 y 20 años, con densidades de rodal entre 273 y 857 árboles·ha<sup>-1</sup>. Los autores encontraron que el método de predicción directo es más preciso, discrepando con los resultados obtenidos en el presente estudio. Cao (2004) probó seis métodos para la predicción de parámetros de la FDP Weibull, entre ellos evaluó el método indirecto PRM y encontró una precisión deficiente en comparación con otros métodos ensayados. El mismo autor también desarrolló un algoritmo para predecir los parámetros de la FDP Weibull obtenidos mediante MVS evaluando el método PPM y encontró buenos resultados en el EMC, más precisos que los métodos de estimación indirectos. Leduc, Matney, Belli, y Baldwin (2001) analizaron dos procedimientos similares a los utilizados en esta investigación, obteniendo resultados comparables; aunque el sistema de ecuaciones lineales con variables de estado de rodal para predecir los parámetros de la FDP Weibull mostró resultados ligeramente mejores en contraste con el PRM. Por su parte Gorgoso et al. (2007) encontraron ventajas significativas al recuperar la distribución diamétrica en rodales de *Betula alba* L. cuando se utilizan los métodos indirectos (PRM) a través de la predicción de los parámetros de la FDP Weibull por el MM. En general, el método de estimación indirecto PRM es eficiente en la predicción de los parámetros de la FDP Weibull;

of moments and modeled later by a combination of methodologies of recovery (shape parameter) and parameter estimates (scale parameter). The use of the proposed methodology allows to estimate the future diameter distribution of a stand and, consequently, some of its state variables, becoming an essential tool for decision making in forest management of natural forests in northwestern Durango, Mexico.

#### End of English version

#### References / Referencias

- Álvarez-González, J. G., & Ruiz-González, A. D. (1998). Análisis y modelización de las distribuciones diamétricas de *Pinus pinaster* Ait., en Galicia. *Investigaciones Agrarias: Sistemas Recursos Forestales*, 7(2), 123–137. Obtenido de <http://www.inia.es/IASPF/1998/vol7/06.J.G.ALVAREZ.pdf>
- Bailey, R. L., & Dell, T. R. (1973). Quantifying diameter distributions with the Weibull function. *Forest Science*, 19, 97–104.
- Borders, B. E. (1989). Systems of equations in forest stand modeling. *Forest Science*, 35, 548–556.
- Borders, B. E., & Patterson, W. D. (1990). Projecting stand tables: A comparison of the Weibull diameter distribution method, a percentile-based projection method, and a basal area growth projection method. *Forest Science*, 36, 413–424.
- Burk, T. E., & Newberry, J. D. (1984). A simple algorithm for moment-based recovery of Weibull distribution parameters. *Forest Science*, 30, 329–332.
- Cao, Q. V., & Burkhart, H. E. (1984). A segmented distribution approach for modeling diameter frequency data. *Forest Science*, 30(1), 129–137.
- Cao, Q. V. (2004). Predicting parameters of a Weibull function for modeling diameter distribution. *Forest Science*, 50, 682–685.
- Cooray, K. (2006). Generalization of the Weibull distribution: The odd Weibull family. *Statistical Modelling*, 6, 265–277. doi: 10.1191/1471082X06st116oa
- Corral-Rivas, J. J., Vargas, L. B., Wehenkel, C., Aguirre, C. O., Álvarez, G. J. G., & Rojo, A. A. (2009). *Guía para el establecimiento de sitios de investigación forestal y de suelos en bosques del estado de Durango*. Durango, México: Editorial UJED.
- Devore, J. L. (1987). *Probability and statistics for engineers and the sciences*. USA: Brooks/Cole Cengage learning.
- Dubey, S. D. (1967). Some percentile estimators for Weibull parameters. *Technometrics*, 9, 119–129. doi: 10.1080/00401706.1967.10490445
- García, M. E. (1981). *Modificaciones al sistema de clasificación climática de Köppen* (4ª ed.). México: Instituto de Geografía, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Gorgoso, J. J., Álvarez, G. J. G., Rojo, A., & Grandas-Arias, J. A. (2007). Modelling diameter distributions of *Betula alba* L. stands in northwest Spain with the two-parameter

no obstante, la precisión está condicionada al nivel de truncamiento de la distribución diamétrica (Borders & Patterson, 1990; Jiang & Brooks, 2009; Vanclay, 1995). Así, en distribuciones diamétricas de bosques de segundo crecimiento y sometidos a un régimen de manejo irregular, como los utilizados en este trabajo, el PRM no se recomienda debido a la alta variabilidad de los parámetros de distribución, especialmente el parámetro de escala  $\lambda$ , con respecto a las variables del rodal. En el presente estudio se observó una relación directa entre el parámetro de escala  $\lambda$  y el diámetro cuadrático y la altura dominante, por tal motivo se decidió mejorar la precisión empleando tal relación y recuperando el parámetro de forma a través del MM.

A pesar de los resultados aceptables, una parte importante de las distribuciones diamétricas analizadas no pudieron modelarse correctamente con la metodología propuesta, por lo que se recomienda probar otras técnicas en trabajos futuros. Una línea de investigación futura debería centrarse en modificaciones realizadas a la función de densidad de Weibull para hacerla aún más flexible, como la propuesta por Lai, Xie, y Murthy (2003) o la generalización denominada “Odd Weibull family” propuesta por Cooray (2006). Otra alternativa sería analizar el empleo de mezclas finitas (*finite mixtures*) de una misma función o de funciones diferentes que ya han dado buenos resultados en la caracterización de distribuciones diamétricas (Liu, Zhang, Davis, Solomon, & Gove, 2002). En todo caso, el empleo de estas funciones para el modelado de las distribuciones diamétricas futuras, supondría ajustar un mayor número de ecuaciones al contar con más parámetros, lo que añadiría una nueva fuente de error y podría limitar su uso.

#### Conclusiones

Las mejores estimaciones se obtuvieron mediante el ajuste de la función de densidad Weibull de tres parámetros, ajustada por el método de los momentos y modelada posteriormente mediante una combinación de las metodologías de recuperación (parámetro de forma) y estimación de parámetros (parámetro de escala). El empleo de la metodología propuesta permitirá reconstruir la distribución diamétrica de un rodal y, en consecuencia, alguna de sus variables de estado, convirtiéndose así en una herramienta fundamental para la toma de decisiones en el manejo forestal de los bosques naturales del noroeste de Durango, México.

Fin de versión en español

- Weibull function. *Investigaciones Agrarias: Sistemas Recursos Forestales*, 16(2), 113–123. Obtenido de <http://revistas.inia.es/index.php/fs/article/view/1002/999>
- Gorgoso-Varela, J. J., & Rojo-Alboreca, A. (2014). A comparison of estimation methods for fitting Weibull and Johnson's SB functions to pedunculate oak (*Quercus robur*) and birch (*Betula pubescens*) stands in northwest Spain. *Forest Systems*, 23(3), 500–505. Obtenido de <http://revistas.inia.es/index.php/fs/article/view/4939/2147>
- González-Elizondo, M. S., González, E. M., & Márquez, L. M. A. (2007). *Vegetación y eco-regiones de Durango*. México: CIIDIR-IPN-Plaza y Valdés, S. A. de C. V.
- Hafley, W. L., & Schreuder, H. T. (1977). Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. *Canadian Journal of Forest Research*, 7, 481–487. doi: 10.1139/x77-062
- Hyink, D. M., & Moser, J. W. (1983). A generalized framework for projecting forest yield and stand structure using diameter distributions. *Forest Science*, 29, 85–95.
- Jiang, L., & Brooks, J. (2009). Predicting diameter distributions for young longleaf pine plantations in Southwest Georgia. *Southern Journal of Applied Forestry*, 33, 25–28.
- Johnson, N. L. (1949). Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika*, 36, 149–176. doi: 10.1093/biomet/36.1-2.149
- Knoebel, B. R., & Burkhart, H. E. (1991). A bivariate distribution approach to modeling forest diameter distribution at two points in time. *Biometrics*, 47, 241–253. doi: 10.2307/2532509
- Lai, C. D., Xie, M., & Murthy, D. N. P. (2003). A modified Weibull distribution. *Reliability, IEEE Transactions*, 52(1), 33–37. doi: 10.1109/TR.2002.805788
- Leduc, D., Matney, T., Belli, K., & Baldwin, C., Jr. (2001). Predicting diameter distribution of longleaf pine plantations: A comparison between artificial neural networks and other accepted methodologies. Asheville, NC, USA: U. S. Department of Agriculture, Forest Service, Southern Research Station. Obtenido de [http://www.srs.fs.usda.gov/pubs/rp/rp\\_srs025.pdf](http://www.srs.fs.usda.gov/pubs/rp/rp_srs025.pdf)
- Liu, C., Zhang, L., Davis, C. J., Solomon, D. S., & Gove, J. H. (2002). A finite mixture model for characterizing the diameter distributions of mixed-species forest stands. *Forest Science* 48(4), 653–661. Obtenido de <http://www.fs.fed.us/ne/durham/4104/papers/Gove2002MixtureForestScience.pdf>
- Maldonado-Ayala, D., & Nívar, J. J. (2002). Ajuste y predicción de la distribución Weibull a las estructuras diamétricas de plantaciones de pino de Durango, México. *Madera y Bosques*, 8(1), 61–72. Obtenido de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=61789905>
- Mehtätalo, L. (2004). An algorithm for ensuring compatibility between estimated percentiles of diameter distribution and measured stand variables. *Forest Science* 50, 20–32.
- Nívar, J. J., & Contreras, J. C. (2000). Ajuste de la distribución Weibull a las estructuras diamétricas de rodales irregulares de Pino de Durango, México. *Agrociencia*, 34, 353–361. Obtenido de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=30234312>
- Newby, M. (1980). The properties of moment estimators for the Weibull distribution based on the sample coefficient of variation. *Technometrics*, 22, 187–194. doi: 10.1080/00401706.1980.10486133
- Parresol, B. (2003). Recovering of Johnson's S<sub>b</sub> distribution. Asheville, NC, USA: U. S. Department of Agriculture, Forest Service, Southern Research Station. Obtenido de [http://www.srs.fs.usda.gov/pubs/rp/rp\\_srs031.pdf](http://www.srs.fs.usda.gov/pubs/rp/rp_srs031.pdf)
- Rennolls, K., Geary, D. N., & Rollison, T. J. D. (1985). Characterizing diameter distributions by the use of the Weibull distribution. *Forestry*, 58(1), 57–66. doi: 10.1093/forestry/58.1.57
- Statistical Analysis System (SAS Institute Inc.). (2008). *SAS/STAT™ User's Guide, Release 8.0 Edition*. Cary, NC, USA: Author.
- Schreuder, H. T., Hafley, W. L., & Bennett, F. A. (1979). Yield prediction for unthinned natural slash pine stands. *Forest Science*, 25, 25–30.
- Scolforo, J. R. S., Vitti, F. C., Grisi, R. L., Acerbi, F., & De Assis, A. L. (2003). SB distribution's accuracy to represent the diameter distribution of *Pinus taeda*, through five fitting methods. *Forest Ecology and Management*, 175, 489–496. doi:10.1016/S0378-1127(02)00183-4
- Shifley, S., & Lentz, E. (1985). Quick estimation of the three-parameter Weibull to describe tree size distributions. *Forest Ecology and Management*, 13, 195–203. doi:10.1016/0378-1127(85)90034-9
- Shiver, B. D. (1988). Sample sizes and estimation methods for the Weibull distribution for unthinned slash pine plantation diameter distributions. *Forest Science*, 34(3), 809–814.
- Smalley, G. W., & Bailey, R. L. (1974). Yield tables and stand structure for loblolly pine plantations in Tennessee, Alabama and Georgia highlands. New Orleans, LA, USA: Forest Service, Southern Forest Experiment Station. Obtenido de
- Sokal, R., & Rohlf, F. (1981). *Biometry* (2a ed.). New York, USA: W. H. Freeman and Company.
- Secretaría de Recursos Naturales y Medio Ambiente (SRNyMA) (2006). Programa Estratégico Forestal 2030. Victoria de Durango, Dgo, México: Secretaría de Recursos Naturales y Medio Ambiente del Estado de Durango.
- Torres-Rojo, J. M., Acosta-Mireles, M., & Magaña-Torres, O. S. (1992). Métodos para estimar los parámetros de la función Weibull y su potencial para ser predichos a través de atributos de rodal. *Agrociencia. Serie Recursos Naturales*, 2(2), 57–76.
- Vanclay, J. (1995). Growth models for tropical forest: A synthesis of models and methods. *Forest Science*, 41, 7–42.
- Wehenkel, C., Corral-Rivas, J. J., Hernández-Díaz, J. C., & Gadov, K. v. (2011). Estimating balanced structure areas in multi-species forests on the Sierra Madre Occidental, Mexico. *Annals of Forest Science*, 68, 385–394. doi: 10.1007/s13595-011-0027-9.

- Wright, S. J., Muller-Landau, H. C., Condit, R., & Hubbell, S. P. (2003). Gap-dependent recruitment, realized vital rates, and size distributions of tropical trees. *Ecology*, 84(12), 3174–3185. doi: 10.1890/02-0038
- Zanakis, S. H. (1979). A simulation study of some simple estimators for the three parameter Weibull distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 9, 101–116. doi: 10.1080/00949657908810302
- Zhang, L., Packard, K., & Liu, C. (2003). A comparison of estimation methods for fitting Weibull and Johnson's  $S_B$  distributions to mixed spruce-fir stands in northeastern North America. *Canadian Journal of Forest Research*, 33, 1340–1347. doi: 10.1139/x03-054
- Zhou, B., & McTague, J. P. (1996). Comparison and evaluation of five methods of estimation of the Johnson's system parameters. *Canadian Journal of Forest Research*, 26(6), 928–935. doi: 10.1139/x26-102